

第3章 | 図形と方程式



第1節 点と直線

1 直線上の点

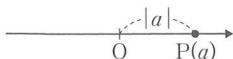
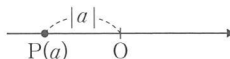
まとめ

1 座標

数直線上で、点 P に実数 a が対応しているとき、 a を点 P の座標といい、座標が a である点 P を $P(a)$ で表す。

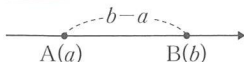
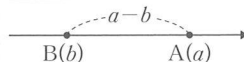
2 2点間の距離

数直線上の原点 O と点 $P(a)$ の距離を、 a の絶対値といい、 $|a|$ で表す。すなわち、2点 O, P 間の距離 OP は $OP=|a|$

 $a > 0$  $a < 0$ 

補足 $a \geq 0$ のとき $|a|=a$, $a < 0$ のとき $|a|=-a$ である。

数直線上の2点 $A(a), B(b)$ 間の距離 AB は $AB=|b-a|$

 $a < b$  $a > b$ 

3 内分と外分

m, n は正の数とする。

線分 AB 上の点 P が $AP:PB=m:n$ を

満たすとき、点 P は線分 AB を

$m:n$ に 内分する という。

また、線分 AB の延長上の点 Q が

$AQ:QB=m:n$ ($m \neq n$)

を満たすとき、点 Q は線分 AB を

$m:n$ に 外分する という。

点 P を線分 AB の 内分点、点 Q を

線分 AB の 外分点 という。

内分



外分

 $m > n$ のとき $m < n$ のとき

4 線分の内分点・外分点

数直線上の2点 $A(a)$, $B(b)$ を結ぶ線分 AB を, $m:n$ に内分する点を P , $m:n$ に外分する点を Q とする。

内分点 P の座標は $\frac{na+mb}{m+n}$, 外分点 Q の座標は $\frac{-na+mb}{m-n}$

とくに, 線分 AB の中点の座標は $\frac{a+b}{2}$

補足 内分点の座標で n を $-n$ におき換えたものが, 外分点の座標である。

3章

図形と方程式

A 数直線上の2点間の距離

教 p.68

練習
1

次の2点間の距離を求めよ。

- (1) $A(-1)$, $B(6)$ (2) $A(4)$, $B(2)$ (3) $O(0)$, $A(-3)$

指針 数直線上の2点間の距離 2点の座標の差の絶対値を求める。

解答 (1) $AB=|6-(-1)|=|7|=7$ 答

(2) $AB=|2-4|=|-2|=2$ 答

(3) $OA=|-3|=3$ 答

B 線分の内分点・外分点

教 p.69

練習
2

数直線上の3点 $A(1)$, $B(7)$, $C(3)$ について, 次の□に適する数または用語を入れよ。

- (1) 点 C は線分 AB を □:□ に □ する。
 (2) 点 B は線分 AC を □:□ に □ する。
 (3) 点 A は線分 CB を □:□ に □ する。

指針 内分と外分 点が線分上にあれば「内分」, 線分の延長上にあれば「外分」である。数直線をかくとよい。

比は, 点と線分の両端の点との距離から求める。

解答 (1) $AC=|3-1|=2$, $CB=|7-3|=4$

よって $AC:CB=2:4=1:2$

点 C は線分 AB を $1:2$ に 内分 する。 答

(2) $AB=|7-1|=6$, $BC=|3-7|=4$

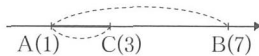
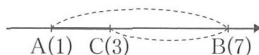
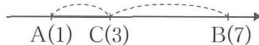
よって $AB:BC=6:4=3:2$

点 B は線分 AC を $3:2$ に 外分 する。 答

(3) $AB=|7-1|=6$, $CA=|1-3|=2$

よって $CA:AB=2:6=1:3$

点 A は線分 CB を $1:3$ に 外分 する。 答



練習
3

2点 $A(4)$, $B(8)$ を結ぶ線分 AB について、次の点の座標を求めよ。

- (1) $3:2$ に内分する点 C (2) $3:1$ に外分する点 D
 (3) $2:3$ に外分する点 E (4) 中点 M

指針 線分の内分点・外分点 2点 $A(a)$, $B(b)$ を結ぶ線分 AB を、 $m:n$ に内分する点を P , 外分する点を Q とするとき、

内分点 P の座標は $\frac{na+mb}{m+n}$, 外分点 Q の座標は $\frac{-na+mb}{m-n}$

線分 AB の中点の座標は $\frac{a+b}{2}$

- 解答** (1) $\frac{2 \times 4 + 3 \times 8}{3+2} = \frac{32}{5}$ から $C\left(\frac{32}{5}\right)$ 答
 (2) $\frac{-1 \times 4 + 3 \times 8}{3-1} = \frac{20}{2} = 10$ から $D(10)$ 答
 (3) $\frac{-3 \times 4 + 2 \times 8}{2-3} = \frac{4}{-1} = -4$ から $E(-4)$ 答
 (4) $\frac{4+8}{2} = 6$ から $M(6)$ 答

2 平面上の点

まとめ

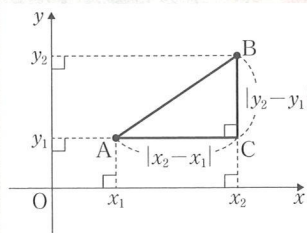
1 2点間の距離

2点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 間の距離 AB は

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

とくに、原点 O と点 $A(x_1, y_1)$ の距離 OA は

$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$



2 内分点・外分点の座標

2点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ を結ぶ線分 AB を、 $m:n$ に内分する点を P , $m:n$ に外分する点を Q とする。

内分点 P の座標は $\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n} \right)$

外分点 Q の座標は $\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m-n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m-n} \right)$

とくに、線分 AB の中点の座標は $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

3 三角形の重心

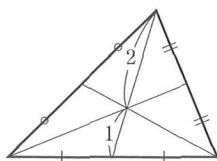
三角形の頂点とそれに向かい合う辺の中点とを結ぶ線分を、三角形の中線という。三角形の3本の中線は1点で交わり、その点は各中線を2:1に内分する。三角形の3本の中線が交わる点を、三角形の重心という。

4 三角形の重心の座標

3点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ を

頂点とする $\triangle ABC$ の重心の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \right)$$



A 座標平面上の2点間の距離

練習
4

次の2点間の距離を求めよ。

- (1) $A(1, 2)$, $B(4, 6)$ (2) $A(-3, 1)$, $B(2, -4)$
 (3) $A(5, -2)$, $B(3, -2)$ (4) 原点 O , $A(2, -3)$

教 p.71

指針 2点間の距離 2点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 間の距離 AB は

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

とくに、原点 O と $A(x_1, y_1)$ の距離 OA は $OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

解答 (1) $AB = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ 答

(2) $AB = \sqrt{\{2 - (-3)\}^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{5^2 \times 2} = 5\sqrt{2}$ 答

(3) $AB = \sqrt{(3-5)^2 + \{-2 - (-2)\}^2} = \sqrt{4} = 2$ 答

(4) $OA = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ 答

別解 (3) y 座標が等しいから、 $AB \parallel x$ 軸であり $AB = |3-5| = 2$ 答

練習
5

点 P は y 軸上にあり、2点 $A(-4, 2)$, $B(1, -1)$ から等距離にある。
 P の座標を求めよ。

教 p.72

指針 等距離にある点 点 P は y 軸上にあるから、 $P(0, y)$ とおき、 $AP=BP$ となることから、 y についての方程式を作る。

解答 点 P の座標を $(0, y)$ とする。

$AP=BP$ すなわち $AP^2=BP^2$ より

$$\{0 - (-4)\}^2 + (y - 2)^2 = \{0 - 1\}^2 + \{y - (-1)\}^2$$

式を整理すると

$$16 + (y^2 - 4y + 4) = 1 + (y^2 + 2y + 1)$$

$$-6y = -18$$

これを解くと $y=3$

よって、点 P の座標は $(0, 3)$ 答

練習
6

△ABCにおいて、辺BCを1:2に内分する点をDとすると、
等式 $2AB^2 + AC^2 = 3(AD^2 + 2BD^2)$ が成り立つ。このことを証明せよ。

指針 座標を利用した証明 BD:DC=1:2であることから、点Dを原点、
B(-c, 0), C(2c, 0) とすると、計算しやすくなる。

解答 直線BCをx軸に、点Dを原点Oにとると、3頂点は

$$A(a, b), B(-c, 0), C(2c, 0)$$

と表すことができる。

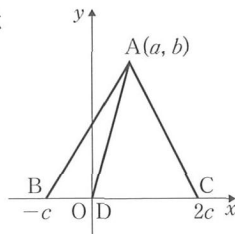
$$\begin{aligned} \text{このとき} \quad AB^2 &= (-c-a)^2 + (-b)^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ca \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC^2 &= (2c-a)^2 + (-b)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 4c^2 - 4ca \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad 2AB^2 + AC^2 = 3(a^2 + b^2 + 2c^2)$$

$$\text{また} \quad AD^2 + 2BD^2 = (a^2 + b^2) + 2c^2 = a^2 + b^2 + 2c^2$$

$$\text{したがって} \quad 2AB^2 + AC^2 = 3(AD^2 + 2BD^2) \quad \text{終}$$



深
め
る

教科書の応用例題1の証明において、B, Cの座標はそのまま
A(0, b) とするとさらに計算がしやすくなるが、このようにおくの
は不適切である。この理由を説明してみよう。

指針 座標を利用した証明 A(0, b), B(-c, 0), C(c, 0) のとき、AB=ACであり、
△ABCは二等辺三角形となる。これが何を意味するのかを考える。

解答 (例) A(0, b), B(-c, 0), C(c, 0) とすると、AB=ACとなる。

したがって、この設定のもとで証明をしても、△ABCがAB=ACの二等辺
三角形であるという制約のもとでの証明であり、一般の三角形について証明
したことにはならない。

したがって、このようにおくのは不適切である。 終

参考 応用例題1の等式 $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$ を中線定理、またはパップスの
定理という。

B 内分点・外分点の座標

教 p.74

練習
7

2点 $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$ を結ぶ線分 AB について、次の点の座標を求めよ。

(1) $2:1$ に内分する点 C (2) $2:1$ に外分する点 D

(3) $2:3$ に外分する点 E (4) 中点 M

指針 内分点・外分点の座標 2点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ を結ぶ線分 AB を, $m:n$ に内分する点を P , 外分する点を Q とするとき,

内分点 P の座標は $\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n} \right)$

外分点 Q の座標は $\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m-n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m-n} \right)$

線分 AB の中点の座標は $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

解答 (1) $\left(\frac{1 \times (-3) + 2 \times 4}{2+1}, \frac{1 \times 2 + 2 \times 5}{2+1} \right)$

から $C\left(\frac{5}{3}, 4\right)$ 答

(2) $\left(\frac{-1 \times (-3) + 2 \times 4}{2-1}, \frac{-1 \times 2 + 2 \times 5}{2-1} \right)$

から $D(11, 8)$ 答

(3) $\left(\frac{-3 \times (-3) + 2 \times 4}{2-3}, \frac{-3 \times 2 + 2 \times 5}{2-3} \right)$

から $E(-17, -4)$ 答

(4) $\left(\frac{-3+4}{2}, \frac{2+5}{2} \right)$ から $M\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 答

練習
8

教 p.74

点 $A(-3, 2)$ に関して、点 $P(0, -4)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

指針 点に関して対称な点 $Q(x, y)$ とし, A が線分 PQ の中点であることから方程式を作り, x, y の値を求める。

解答 点 Q の座標を (x, y) とすると, 線分 PQ の中点が点 A であるから

$$\frac{0+x}{2} = -3, \quad \frac{-4+y}{2} = 2$$

これを解くと $x = -6, y = 8$

よって, 点 Q の座標は $(-6, 8)$ 答

3
章

図形と方程式

練習
9

教 p.75

教科書の例題3の $\triangle ABC$ において、辺ABの中点をN、線分CNを2:1に内分する点を G' とする。 G' の座標を求めよ。

指針 三角形と内分点の座標 中点の座標の公式、内分点の座標の公式にあてはめて、線分ABの中点Nの座標、線分CNを2:1に内分する点の座標を順に求める。

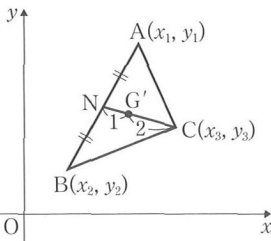
解答 辺ABの中点Nの座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2} \right)$$

よって、線分CNを2:1に内分する点 G' の座標は

$$\left(\frac{1 \times x_3 + 2 \times \frac{x_1+x_2}{2}}{2+1}, \frac{1 \times y_3 + 2 \times \frac{y_1+y_2}{2}}{2+1} \right)$$

$$\text{すなわち } \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \right) \quad \text{答}$$



注意 求めた座標は、例題3の結果と同じになっている。

練習
10

教 p.75

次の3点A, B, Cを頂点とする $\triangle ABC$ の重心の座標を求めよ。

- (1) A(1, 1), B(5, 2), C(3, 4)
 (2) A(-2, 4), B(0, -3), C(2, 1)

指針 三角形の重心 3点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \right)$$

解答 (1) $\left(\frac{1+5+3}{3}, \frac{1+2+4}{3} \right)$ から $\left(3, \frac{7}{3} \right)$ 答

(2) $\left(\frac{-2+0+2}{3}, \frac{4+(-3)+1}{3} \right)$ から $\left(0, \frac{2}{3} \right)$ 答

← x座標, y座標
それぞれの「平均」

3 直線の方程式

まとめ

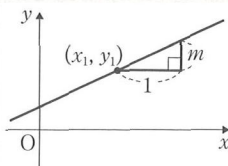
1 1次方程式の表す図形

x, y の1次方程式 $ax+by+c=0$ の表す図形は直線である。逆に、座標平面上のすべての直線は x, y の1次方程式 $ax+by+c=0$ で表される。ただし、 a, b, c は定数で、 $a \neq 0$ または $b \neq 0$ である。

2 直線の方程式(1)

点 (x_1, y_1) を通り、傾きが m の直線の方程式は

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

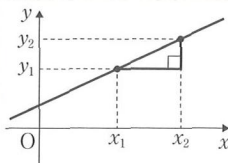


3 直線の方程式(2)

異なる2点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線の方程式は

$$x_1 \neq x_2 \text{ のとき } y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$x_1 = x_2 \text{ のとき } x=x_1$$



4 x切片, y切片

直線が x 軸, y 軸とそれぞれ点 $(a, 0), (0, b)$ で交わる時、 a をこの直線の x 切片, b をこの直線の y 切片 という。

A x, y の1次方程式の表す図形

教 p.76

練習
11

次の方程式の表す直線を座標平面上にかけ。

$$(1) \quad 3x-y+1=0 \quad (2) \quad y+1=0 \quad (3) \quad x-2=0$$

指針 1次方程式の表す図形 $ax+by+c=0$ の表す図形は直線である。

- (1) $a \neq 0, b \neq 0$ の場合で、 y について解き、傾きと切片を求める。
- (2) $a=0, b \neq 0$ の場合で、 y 軸に垂直な直線である。
- (3) $a \neq 0, b=0$ の場合で、 x 軸に垂直な直線である。

3
章

図形と方程式

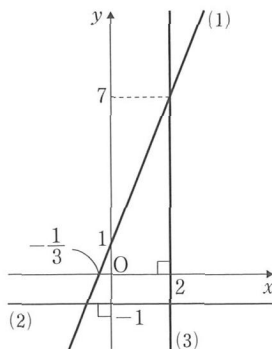
解答 (1) この方程式を変形すると

$$y=3x+1$$

よって、この方程式の表す図形は、傾きが3、切片が1の直線である。

(2) $y=-1$ であるから、この方程式の表す図形は、点 $(0, -1)$ を通り y 軸に垂直な直線である。

(3) $x=2$ であるから、この方程式の表す図形は、点 $(2, 0)$ を通り x 軸に垂直な直線である。



B 直線の方程式のいろいろな形

教 p.77

練習 12

次のような直線の方程式を求めよ。

- (1) 点 $(2, -4)$ を通り、傾きが3の直線
 (2) 点 $(-3, 1)$ を通り、傾きが-2の直線

指針 1点と傾きが与えられた直線の方程式 点 (x_1, y_1) を通り、傾きが m の直線の方程式は $y-y_1=m(x-x_1)$

解答 (1) $y-(-4)=3(x-2)$

$$\begin{aligned} \leftarrow y-y \text{ 座標} \\ = m(x-x \text{ 座標}) \end{aligned}$$

すなわち $y=3x-10$ **答**

(2) $y-1=-2\{x-(-3)\}$

すなわち $y=-2x-5$ **答**

練習 13

次の2点を通る直線の方程式を求めよ。

- (1) $(3, 2), (5, 6)$ (2) $(-1, 4), (2, -2)$
 (3) $(2, -1), (1, -1)$ (4) $(3, -1), (3, 4)$

指針 2点を与えられた直線の方程式 異なる2点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線の方程式は

$$x_1 \neq x_2 \text{ のとき } y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$x_1 = x_2 \text{ のとき } x=x_1$$

(4) は $x_1=x_2$ の場合である。

解答 (1) $y-2=\frac{6-2}{5-3}(x-3)$

すなわち $y=2x-4$ **答**

(2) $y-4=\frac{-2-4}{2-(-1)}\{x-(-1)\}$

$$\leftarrow y-2 = \frac{6-2}{5-3}(x-3)$$

すなわち $y = -2x + 2$ 答

$$(3) \quad y - (-1) = \frac{-1 - (-1)}{1 - 2}(x - 2)$$

すなわち $y = -1$ 答(4) 2つの点の x 座標は等しく 3 であるから $x = 3$ 答
 $\leftarrow x_1 = x_2$ のとき
 $x = x_1 (= x_2)$

注意 (3) のように、 $y_1 = y_2$ のとき、異なる 2 点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) を通る直線の方程式は $y = y_1$ となる。

3 章

図形と方程式

練習 14

教 p.78

 $a \neq 0$, $b \neq 0$ とする。 x 切片が a , y 切片が b である直線の方程式は、

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ で表されることを示せ。}$$

指針 x 切片, y 切片が与えられた直線の方程式 x 切片が a , y 切片が b であるから、この直線は 2 点 $(a, 0)$, $(0, b)$ を通る。公式を使う。

解答 2 点 $(a, 0)$, $(0, b)$ を通る直線であるから

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a)$$

$$\text{すなわち} \quad y = -\frac{b}{a}x + b \quad \text{よって} \quad \frac{bx}{a} + y = b$$

$$\text{両辺を } b \text{ で割ると} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{終}$$

4 2 直線の関係

まとめ

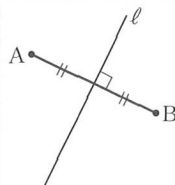
1 2 直線の平行・垂直

2 直線 $y = m_1x + n_1$, $y = m_2x + n_2$ について2 直線が平行 $\iff m_1 = m_2$ $\leftarrow$ 傾きが等しい2 直線が垂直 $\iff m_1 m_2 = -1$ $\leftarrow$ 傾きの積が -1

注意 $m_1 = m_2$ かつ $n_1 = n_2$ のとき、2 直線は一致するが、この場合も 2 直線は平行であると考えことにする。

2 直線に関して対称な点

2 点 A, B が直線 ℓ に関して対称であるのは、次の [1], [2] が成り立つときである。

[1] 直線 AB は ℓ に垂直である。[2] 線分 AB の中点は ℓ 上にある。(直線 ℓ は線分 AB の垂直二等分線である。)

3 点と直線の距離

原点 O と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

点 (x_1, y_1) と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

A 2 直線の平行・垂直

教 p.79

練習
15

次の直線のうち、直線 $y=-2x$ と平行であるものはどれか。

- ① $y=2x-3$ ② $y=-2x+4$ ③ $2x+y+5=0$

指針 2 直線の平行 2 直線の傾きが等しいとき、その 2 直線は平行である。直線 ①~③の中から、傾きが -2 であるものを選ぶ。

解答 直線 ① の傾きは 2

直線 ② の傾きは -2

$y=-2x-5$ から、直線 ③ の傾きは -2

よって、直線 $y=-2x$ と平行であるものは ②, ③ 答

教 p.80

練習
16

次の 2 直線は、それぞれ平行、垂直のいずれであるか。

- (1) $y=4x+1$, $y=4x-3$ (2) $y=3x-1$, $x+3y+2=0$
(3) $2x+3y=3$, $4x+6y=5$ (4) $3x+4y=2$, $4x-3y=1$

指針 2 直線の平行、垂直 2 直線 $y=m_1x+n_1$, $y=m_2x+n_2$ について

2 直線が平行 $\iff m_1=m_2$, 2 直線が垂直 $\iff m_1m_2=-1$

$ax+by=c$ のような形になっているものは、 $y=mx+n$ の形に変形して傾きを求める。

解答 (1) 直線 $y=4x+1$ の傾きは 4, 直線 $y=4x-3$ の傾きは 4

傾きが等しいから、2 直線は 平行 である。 答

(2) 直線 $y=3x-1$ の傾きを m_1 とすると $m_1=3$

直線 $x+3y+2=0$ の傾きを m_2 とすると

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \text{ から } m_2 = -\frac{1}{3}$$

← y について解く。

$m_1m_2 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$ であるから、2 直線は 垂直 である。 答

(3) 直線 $2x+3y=3$ の傾きを m_1 とすると

$$y = -\frac{2}{3}x + 1 \text{ から } m_1 = -\frac{2}{3}$$

直線 $4x+6y=5$ の傾きを m_2 とすると

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{6} \text{ から } m_2 = -\frac{2}{3}$$

$m_1 = m_2$ であるから、2 直線は 平行 である。 答

(4) 直線 $3x+4y=2$ の傾きを m_1 とすると

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \text{ から } m_1 = -\frac{3}{4}$$

直線 $4x-3y=1$ の傾きを m_2 とすると

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} \text{ から } m_2 = \frac{4}{3}$$

$m_1 m_2 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{4}{3} = -1$ であるから、2 直線は 垂直 である。 答

教 p.80

練習
17

点 $A(3, -1)$ を通り、直線 $3x+2y+1=0$ に垂直な直線、平行な直線の方程式をそれぞれ求めよ。

指針 平行な直線、垂直な直線 求める直線を $y-(-1)=m(x-3)$ とおく。直線 $3x+2y+1=0$ の傾きを求め、垂直 (傾きの積が -1)、平行 (傾きが等しい) という条件から、それぞれの場合の m の値を求める。一般に、求める直線の方程式は出題の直線の式の形にあわせる。よって、ここでは $ax+by+c=0$ の形で答える。

解答 $3x+2y+1=0$ …… ①

直線 ① の傾きは $-\frac{3}{2}$

点 A を通り、直線 ① に垂直な直線 ② の傾きを m とすると

$$-\frac{3}{2}m = -1 \text{ から } m = \frac{2}{3} \quad \leftarrow m_1 m_2 = -1$$

直線 ② の方程式は $y-(-1) = \frac{2}{3}(x-3)$

よって $2(x-3)-3(y+1)=0$ すなわち $2x-3y-9=0$

次に、点 A を通り、直線 ① に平行な直線の方程式は

$$y-(-1) = -\frac{3}{2}(x-3)$$

よって $3(x-3)+2(y+1)=0$ すなわち $3x+2y-7=0$

答 垂直な直線 $2x-3y-9=0$ 、平行な直線 $3x+2y-7=0$

参考 一般に、点 (x_1, y_1) を通り、直線 $ax+by+c=0$ に平行な直線、垂直な直線は、それぞれ次の方程式で表される。

平行 $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$ 垂直 $b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$

B 直線に関して対称な点

教 p.81

練習
18

直線 $2x - y + 2 = 0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して点 $A(2, 1)$ と対称な点 B の座標を求めよ。

指針 直線に関して対称な点 2点 A, B が ℓ に関して対称であるのは、次の [1], [2] が成り立つときである。

[1] 直線 AB は ℓ に垂直である (傾きの積が -1)

[2] 線分 AB の中点は ℓ 上にある (中点の座標は ℓ の式を満たす)

点 B の座標を (p, q) とし、上の [1], [2] が成り立つように p, q についての方程式を作る。

解答 点 B の座標を (p, q) とする。

[1] 直線 ℓ の傾きは 2 , 直線 AB の

傾きは $\frac{q-1}{p-2}$ である。

$AB \perp \ell$ であるから

$$2 \cdot \frac{q-1}{p-2} = -1$$

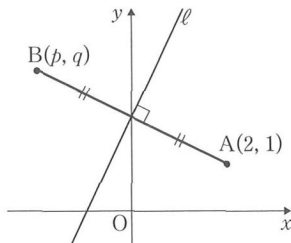
$$\text{すなわち } p + 2q - 4 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

[2] 線分 AB の中点 $\left(\frac{2+p}{2}, \frac{1+q}{2}\right)$ が直線 ℓ 上にあるから

$$2 \cdot \frac{2+p}{2} - \frac{1+q}{2} + 2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad 2p - q + 7 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ② を解くと $p = -2, q = 3$

よって、点 B の座標は $(-2, 3)$ **答**



C 点と直線の距離

教 p.82

練習
19

原点と次の直線の距離を求めよ。

(1) $2x - y + 5 = 0$

(2) $2x + 3y - 4 = 0$

指針 原点と直線の距離 原点 O と直線 $ax + by + c = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

解答 (1) $d = \frac{|5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ **答**

$$\leftarrow a=2, b=-1, c=5$$

(2) $d = \frac{|-4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$ **答**

$$\leftarrow a=2, b=3, c=-4$$

練習
20

次の点と直線の距離を求めよ。

- (1) 点 (1, 2), 直線 $3x-4y-1=0$
 (2) 点 (2, -3), 直線 $2x+y-3=0$
 (3) 点 (-1, 5), 直線 $y=3x-2$

指針 点と直線の距離 点 (x_1, y_1) と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- (3) 直線の方程式を
- $ax+by+c=0$
- の形に変形する。

解答 (1) $d = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$ 答

(2) $d = \frac{|2 \cdot 2 + (-3) - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 答

(3) $y=3x-2$ から $3x-y-2=0$

よって $d = \frac{|3 \cdot (-1) - 5 - 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$ 答

3
章

図形と方程式

研究 2 直線の交点を通る直線

まとめ

2 直線の交点を通る直線

2 直線 $ax+by+c=0$ …… ④, $a'x+b'y+c'=0$ …… ⑤ の交点を通る直線の方程式は, k を定数として, 次のように表される。

$$k(ax+by+c) + (a'x+b'y+c') = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

ただし, ⑤は直線 ④は表さない。

練習
1

2 直線 $2x-y+1=0$, $x+y-4=0$ の交点と, 点 $(-2, 1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

指針 2 直線の交点を通る直線 直線 $k(2x-y+1) + (x+y-4) = 0$ が点 $(-2, 1)$ を通ると考えて, $x=-2$, $y=1$ を代入して, k の値を決定する。

解答 k を定数として

$$k(2x-y+1) + (x+y-4) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とすると, ①は2直線の交点を通る直線を表す。

直線 ①が点 $(-2, 1)$ を通るから, ①に $x=-2$, $y=1$ を代入して

$$-4k-5=0 \quad \text{よって} \quad k=-\frac{5}{4}$$

これを①に代入して整理すると

$$2x-3y+7=0 \quad \text{答}$$

深める

教 p.84

l を定数とする。 $(x+2y-4)+l(x-y-1)=0$ …… ④ とするとき、教科書 84 ページの ③ が表すことのできる図形と ④ が表すことのできる図形は同じだろうか。

指針 2 直線の交点を通る直線 教科書 p.84 で述べられているように、

$k(x+2y-4)+(x-y-1)=0$ …… ③ は、直線 $x+2y-4=0$ 、すなわち、左辺が 〰 となる場合を表すことができない。このことに着目する。

解答 (例) ③, ④ はともに 2 直線 $x+2y-4=0$ …… ①, $x-y-1=0$ …… ② の交点を通る直線を表すが、③ は直線 ① を表さず、④ は直線 ② を表さない。

よって、③ が表すことのできる図形と ④ が表すことのできる図形は同じではない。 終

参考 ③ が直線 ① を表さないことは次のように説明できる。

③ より、 $(k+1)x+(2k-1)y-4k-1=0$ であるから、③ が ① を表すには、 $(k+1):(2k-1)=1:2$ となることが必要であるが、このとき $2k-1=2(k+1)$ 、すなわち、 $2k-1=2k+2$ となり、これを満たす実数 k は存在しない。よって、③ は ① を表すことはできない。

第3章 第1節

問題

教 p.85

- 1 原点 O と点 A(6, 2), B(2, 4) の3点を頂点とする△OAB は、直角二等辺三角形であることを示せ。

指針 **三角形の形状** まず、2点間の距離の公式を使って3辺の長さを調べ、さらに三平方の定理の逆を用いる。

解答 各辺の長さの平方は

$$OA^2 = 6^2 + 2^2 = 40$$

$$OB^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

$$AB^2 = (2-6)^2 + (4-2)^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

$$\text{よって } OB = AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

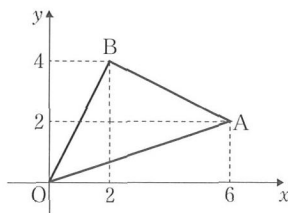
$$\text{また, } OA^2 = OB^2 + AB^2 \text{ であるから,}$$

三平方の定理の逆により

$$\angle ABO = 90^\circ$$

よって、△OAB は OA を斜辺とする直角二等辺三角形である。

終



3章

図形と方程式

教 p.85

- 2 4点 A(1, 1), B(4, 3), C(2, 6), D を頂点とする平行四边形 ABCD について、次の点の座標を求めよ。

- (1) 対角線 AC の中点 M (2) 頂点 D

指針 **中点の座標の応用** 平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わる。すなわち、対角線 AC, BD の中点の座標は一致する。

解答 (1) 線分 AC の中点 M の座標は

$$\left(\frac{1+2}{2}, \frac{1+6}{2}\right) \text{ すなわち } \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) \quad \text{答}$$

- (2) 平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わる。

点 D の座標を (x, y) とすると、線分 BD の

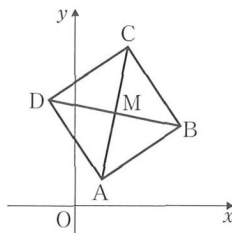
$$\text{中点の座標は } \left(\frac{4+x}{2}, \frac{3+y}{2}\right)$$

これが中点 M の座標と一致するから、(1) より

$$\frac{4+x}{2} = \frac{3}{2}, \quad \frac{3+y}{2} = \frac{7}{2}$$

これを解いて $x = -1, y = 4$

よって、D の座標は $(-1, 4)$ 答



- 3 3点 $A(1, 5)$, $B(6, -3)$, $C(x, y)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心の座標が $(1, 3)$ であるとき, x, y の値を求めよ。

指針 三角形の重心 3点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \right)$$

解答 3点 $A(1, 5)$, $B(6, -3)$, $C(x, y)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心の座標は

$$\left(\frac{1+6+x}{3}, \frac{5-3+y}{3} \right)$$

これが点 $(1, 3)$ と一致するとき

$$\frac{1+6+x}{3}=1, \quad \frac{5-3+y}{3}=3$$

よって $x=-4, y=7$ **答**

- 4 2点 $A(4, 0)$, $B(0, 2)$ を通る直線の方程式を求めよ。

指針 2点を通る直線の方程式 $x_1 \neq x_2$ のとき, 2点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) を通る直線の方程式は $y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

解答 2点 $A(4, 0)$, $B(0, 2)$ を通る直線の方程式は

$$y-0 = \frac{2-0}{0-4}(x-4)$$

すなわち $y = -\frac{1}{2}(x-4)$

両辺に 2 を掛けて整理すると

$$x+2y-4=0 \quad \text{答}$$

参考 x 切片が a , y 切片が b ($a \neq 0, b \neq 0$) である直線の方程式は

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ であることを利用すると, 次のようになる。

別解 求める直線の x 切片は 4, y 切片は 2 であるから

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1 \quad \text{すなわち} \quad x+2y-4=0 \quad \text{答}$$

- 5 2直線 $3x-4y+5=0$, $2x+y-4=0$ の交点を通り、次の条件を満たす直線の方程式を、それぞれ求めよ。

- (1) 直線 $2x+3y=0$ に平行 (2) 直線 $2x+3y=0$ に垂直

指針 平行な直線, 垂直な直線 点 (x_1, y_1) を通り、傾き m の直線は $y-y_1=m(x-x_1)$ であることを用いる。まず、2直線の交点の座標を求める。次に、傾き m を、(1)では、「平行 $\iff$ 傾きが等しい」、(2)では、「垂直 $\iff$ 傾きの積が -1 」の関係を用いてそれぞれ求める。

解答 $3x-4y+5=0$ …… ①

$2x+y-4=0$ …… ②

①, ②を連立方程式として解くと $x=1, y=2$

よって、2直線 ①, ②の交点の座標は $(1, 2)$

この交点を通り傾き m の直線は $y-2=m(x-1)$ …… ③

また、直線 $2x+3y=0$ …… ④の傾きは $-\frac{2}{3}$

(1) ④と平行な直線の傾きは $-\frac{2}{3}$ であるから、③で $m=-\frac{2}{3}$ として

$y-2=-\frac{2}{3}(x-1)$ すなわち $2x+3y-8=0$ 答

(2) ④と垂直な直線の傾きを m とすれば $-\frac{2}{3}m=-1$ から $m=\frac{3}{2}$

よって、③から

$y-2=\frac{3}{2}(x-1)$ すなわち $3x-2y+1=0$ 答

- 6 2直線 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ について、次のことを証明せよ。
ただし、 $b \neq 0$, $b' \neq 0$ とする。

2直線が平行 $\iff ab'-ba'=0$

2直線が垂直 $\iff aa'+bb'=0$

指針 2直線の平行条件・垂直条件

2直線が平行 $\iff$ 傾きが等しい
2直線が垂直 $\iff$ 傾きの積が -1 } の関係を利用する。

解答 $b \neq 0$, $b' \neq 0$ であるから、2直線 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ の傾きは、それぞれ $-\frac{a}{b}$, $-\frac{a'}{b'}$

よって 2直線が平行 $\iff -\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$

すなわち 2 直線が平行 $\iff ab' - ba' = 0$

また 2 直線が垂直 $\iff -\frac{a}{b} \cdot \left(-\frac{a'}{b'}\right) = -1$

すなわち 2 直線が垂直 $\iff aa' + bb' = 0$ 終

注意 2 直線 $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ が一致する場合, $ab' - ba' = 0$ が成り立つ。
すなわち, 上記の平行条件には, 2 直線が一致する場合も含まれる。

教 p.85

7 2 点 $A(a, b)$, $B(b, a)$ は, 直線 $y = x$ に関して対称であることを示せ。
ただし, $a \neq b$ とする。

指針 直線に関して対称な点 2 点 A, B が直線 ℓ に関して対称であることを示すためには, 次の [1], [2] を示せばよい。

[1] 直線 AB は ℓ に垂直である。

[2] 線分 AB の中点は ℓ 上にある。

解答 直線 $y = x$ を ℓ とする。

[1] $a \neq b$ であるから, 直線 AB の傾きは

$$\frac{a-b}{b-a} = \frac{-(b-a)}{b-a} = -1$$

また, 直線 ℓ の傾きは 1

よって, 直線 AB と ℓ の傾きの積は $(-1) \cdot 1 = -1$ であるから, 直線 AB は ℓ に垂直である。

[2] 線分 AB の中点の座標は $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+a}{2}\right)$ すなわち, $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ で

あり, x 座標と y 座標が等しいから, 直線 $y = x$, すなわち, ℓ 上の点である。
したがって, [1], [2] から, 2 点 A, B は直線 $y = x$ に関して対称である。 終

8 次の問いに答えよ。

- (1) 2点 $A(4, -2)$, $B(-2, 6)$ を通る直線 ℓ の方程式を求めよ。
- (2) 原点 O と直線 ℓ の距離を求めよ。
- (3) $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

指針 直線と図形の面積

- (1) 2点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ($x_1 \neq x_2$) を通る直線の方程式は

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

- (2) 原点 O と直線 $ax + by + c = 0$ の距離 d は $d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

- (3) AB を底辺とみると $\triangle OAB = \frac{1}{2} AB \cdot d$

解答 (1) 2点 $A(4, -2)$, $B(-2, 6)$ を通る直線 ℓ の方程式は

$$y - (-2) = \frac{6 - (-2)}{-2 - 4} (x - 4)$$

整理して $4x + 3y - 10 = 0$ 答

- (2) 原点 O と直線 $4x + 3y - 10 = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|-10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2 \quad \text{答}$$

- (3) 線分 AB の長さは

$$AB = \sqrt{(-2 - 4)^2 + \{6 - (-2)\}^2} = \sqrt{100} = 10$$

$\triangle OAB$ の底辺を線分 AB とすると、高さは d であるから

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} AB \cdot d = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 = 10 \quad \text{答}$$

第2節 円

5 円の方程式

まとめ

1 円の方程式

- ① 点
- $C(a, b)$
- を中心とする半径
- r
- の円の方程式は

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

- ② 原点を中心とする半径
- r
- の円の方程式は

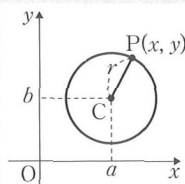
$$x^2 + y^2 = r^2$$

- ③ 円の方程式は,
- l, m, n
- を定数として

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$$

の形にも表される。

← x, y の2次方程式で, x^2 と y^2 の係数が等しく, xy の項がない。



2 外接円

$\triangle ABC$ の3つの頂点を通る円を $\triangle ABC$ の外接円といい, 外接円の中心を $\triangle ABC$ の外心という。

A 円の方程式

教 p.86

練習
21

次のような円の方程式を求めよ。

- (1) 中心が原点, 半径が2 (2) 中心が点
- $(2, 3)$
- , 半径が4

- (3) 中心が点
- $(-2, 1)$
- , 半径が
- $\sqrt{10}$

指針 円の方程式 原点を中心とする半径 r の円の方程式は $x^2 + y^2 = r^2$, 点 (a, b) を中心とする半径 r の円の方程式は $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

解答 (1) $x^2 + y^2 = 2^2$ すなわち $x^2 + y^2 = 4$ 答(2) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4^2$ すなわち $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$ 答(3) $\{x - (-2)\}^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{10})^2$ すなわち $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$ 答練習
22

教 p.86

円 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 8$ の中心の座標と半径を求めよ。

指針 円の中心と半径 方程式 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ は中心が (a, b) , 半径が r の円を表す。与えられた方程式を上の変形して調べる。

解答 $(x-3)^2+(y+2)^2=8$ より $(x-3)^2+\{y-(-2)\}^2=(2\sqrt{2})^2$
 よって、中心の座標は $(3, -2)$ 、半径は $2\sqrt{2}$ **答**

練習
23

教 p.87

2点 $A(-3, 2)$, $B(1, 6)$ を直径の両端とする円について、中心 C の座標と半径 r を求めよ。また、その方程式を求めよ。

指針 2点を直径の両端とする円の方程式 円の中心 C の座標 (a, b) と半径 r を求めて、 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ に代入する。中心 C は線分 AB の中点であり、半径 r は線分 CA の長さである。

解答 C は線分 AB の中点で、その座標は $\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$

すなわち $(-1, 4)$ **答**

また $r=CA=\sqrt{\{-3-(-1)\}^2+(2-4)^2}$
 $=2\sqrt{2}$ **答**

この円の方程式は

$$\{x-(-1)\}^2+(y-4)^2=(2\sqrt{2})^2$$

すなわち $(x+1)^2+(y-4)^2=8$ **答**

B $x^2+y^2+lx+my+n=0$ の表す図形

教 p.87

練習
24

次の方程式はどのような図形を表すか。

(1) $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ (2) $x^2+y^2+6x+8y+9=0$

指針 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ の表す図形 与えられた方程式を、 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の形に変形して、中心の座標と半径を求める。

解答 (1) 方程式を変形すると $(x^2+4x)+(y^2-2y)=4$

すなわち $(x+2)^2-2^2+(y-1)^2-1^2=4$

よって $(x+2)^2+(y-1)^2=3^2$

これは、点 $(-2, 1)$ を中心とする半径 3 の円を表す。 **答**

(2) 方程式を変形すると $(x^2+6x)+(y^2+8y)=-9$

すなわち $(x+3)^2-3^2+(y+4)^2-4^2=-9$

よって $(x+3)^2+(y+4)^2=4^2$

これは、点 $(-3, -4)$ を中心とする半径 4 の円を表す。 **答**

注意 方程式 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ …… ① が、常に円を表すとは限らない。

① を変形すると $\left(x+\frac{l}{2}\right)^2+\left(y+\frac{m}{2}\right)^2=\frac{l^2+m^2-4n}{4}$

$l^2+m^2-4n>0$ のとき、① は円を表し、半径は $\frac{\sqrt{l^2+m^2-4n}}{2}$

3
章

図形と方程式

$l^2+m^2-4n=0$ のとき, ① は 1 つの点 $\left(-\frac{l}{2}, -\frac{m}{2}\right)$ を表す。

$l^2+m^2-4n<0$ のとき, ① が表す図形はない。

C 3点を通る円の方程式

教 p.88

練習
25

次の 3 点 A, B, C を通る円の方程式を求めよ。

(1) A(1, 1), B(2, 1), C(-1, 0)

(2) A(1, 3), B(5, -5), C(4, 2)

指針 3点を通る円の方程式 円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とし, 3 点の座標を代入して, l, m, n についての連立方程式を作り, l, m, n の値を求める。

解答 (1) 求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点 A を通るから $1^2+1^2+l+m+n=0$

点 B を通るから $2^2+1^2+2l+m+n=0$

点 C を通るから $(-1)^2+(-1)l+n=0$

整理すると $l+m+n+2=0$ …… ①

$2l+m+n+5=0$ …… ②

$-l+n+1=0$ …… ③

②-① から $l+3=0$ よって $l=-3$

③に代入すると $-(-3)+n+1=0$ よって $n=-4$

①に代入すると $-3+m-4+2=0$ よって $m=5$

したがって, 求める円の方程式は $x^2+y^2-3x+5y-4=0$ **答**

(2) 求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点 A を通るから $1^2+3^2+l+3m+n=0$

点 B を通るから $5^2+(-5)^2+5l+(-5)m+n=0$

点 C を通るから $4^2+2^2+4l+2m+n=0$

整理すると $l+3m+n+10=0$ …… ①

$5l-5m+n+50=0$ …… ②

$4l+2m+n+20=0$ …… ③

②-① から $4l-8m+40=0$

すなわち $l-2m+10=0$ …… ④

③-① から $3l-m+10=0$ …… ⑤

④-⑤×2 から $-5l-10=0$ よって $l=-2$

このとき, ④ から $-2-2m+10=0$ $m=4$

さらに, ① から $-2+3\cdot 4+n+10=0$ $n=-20$

したがって, 求める円の方程式は $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ **答**

注意 (1), (2) で求めた方程式は, $\triangle ABC$ の外接円の方程式である。たとえば, (1) で, 求めた円の方程式を変形すると $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$ であるから, $\triangle ABC$ の外心の座標が $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ であることがわかる。

6 円と直線

3 章

図形と方程式

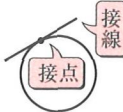
まとめ

1 円と直線の共有点の座標

円と直線の共有点の座標は, それらの方程式を連立させた連立方程式を解くことによって, 求めることができる。

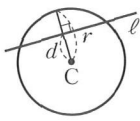
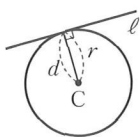
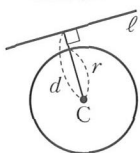
2 円と直線の位置関係 (判別式の値による分類)

円の方程式と直線の方程式から y を消去して得られる x の 2 次方程式を $ax^2 + bx + c = 0$ とする。この 2 次方程式の判別式を D とすると, 円と直線の位置関係は, 次のようになる。

$D = b^2 - 4ac$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$ax^2 + bx + c = 0$ の実数解	異なる 2 つの実数解	重解 (ただ 1 つ)	実数解を もたない
円と直線の 位置関係	異なる 2 点で交わる 	接する 	共有点を もたない 
共有点の個数	2 個	1 個	0 個

3 円と直線の位置関係 (中心との距離による分類)

点 C を中心とする半径 r の円と直線 ℓ の位置関係は, 円の中心 C と直線 ℓ の距離を d とするとき, 次のようになる。

d と r の大小	$d < r$	$d = r$	$d > r$
円と直線の 位置関係	異なる 2 点で交わる 	接する 	共有点を もたない 

4 円上の点における接線の方程式

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は

$$x_1x + y_1y = r^2$$

A 円と直線の位置関係

教 p.89

練習
26

次の円と直線の共有点の座標を求めよ。

(1) $x^2 + y^2 = 25$, $y = x + 1$ (2) $x^2 + y^2 = 8$, $x + y = 4$

指針 円と直線の共有点の座標 2直線の共有点の座標と同様に、円の方程式と直線の方程式を連立させた連立方程式を解く。

解答 (1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y = x + 1 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

②を①に代入して

$$x^2 + (x+1)^2 = 25$$

整理すると $x^2 + x - 12 = 0$

これを解くと $x = -4, 3$

②に代入して

$$x = -4 \text{ のとき } y = -3$$

$$x = 3 \text{ のとき } y = 4$$

よって、共有点の座標は

$$(-4, -3), (3, 4) \quad \text{答}$$

(2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x + y = 4 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

②から $y = 4 - x$ $\cdots \cdots \textcircled{3}$

③を①に代入して

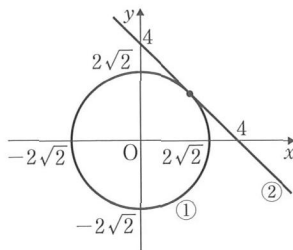
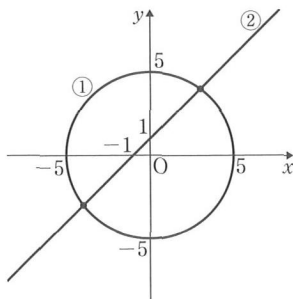
$$x^2 + (4-x)^2 = 8$$

整理すると $x^2 - 4x + 4 = 0$

これを解くと $x = 2$

③に代入して $y = 2$

よって、共有点の座標は $(2, 2) \quad \text{答}$



練習
27

円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=2x+m$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 円と直線が共有点をもつとき、定数 m の値の範囲を求めよ。
- (2) 円と直線が接するとき、定数 m の値と接点の座標を求めよ。

指針 円と直線の位置関係 円の方程式と直線の方程式から y を消去した x についての2次方程式の判別式を D とする。

- (1) 共有点をもつ $\rightarrow$ 共有点は2個または1個 $\iff D \geq 0$
- (2) 接する $\rightarrow$ 共有点は1個 $\iff D = 0$

解答 $x^2+y^2=5$ と $y=2x+m$ から y を消去すると

$$x^2 + (2x+m)^2 = 5$$

整理すると $5x^2 + 4mx + (m^2 - 5) = 0$ …… ①

判別式を D とすると $\frac{D}{4} = (2m)^2 - 5(m^2 - 5) = -(m^2 - 25)$

- (1) この円と直線が共有点をもつのは、 $D \geq 0$ のときである。

よって、 $m^2 - 25 \leq 0$ から $-5 \leq m \leq 5$ 答

- (2) この円と直線が接するのは、 $D = 0$ のときである。

よって、 $m^2 - 25 = 0$ から

$$m = \pm 5$$

また、方程式①が重解をもつとき、その重解は

$$x = -\frac{4m}{2 \cdot 5} = -\frac{2}{5}m$$

これを $y=2x+m$ に代入すると

$$y = 2\left(-\frac{2}{5}m\right) + m = \frac{1}{5}m$$

であるから、接点の座標は、 $\left(-\frac{2}{5}m, \frac{1}{5}m\right)$ と表される。

よって $m=5$ のとき $(-2, 1)$ 、 $m=-5$ のとき $(2, -1)$ 答

注意 (2) では、2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が重解をもつとき、その重解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} \text{ より、} x = -\frac{b}{2a} \text{ となることを用いている。}$$

練習
28

半径 r の円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $x+2y-5=0$ が接するとき、 r の値を求めよ。

指針 円と直線が接する条件 円と直線が $d=r$ のときに接する。すなわち、円の中心(本問では原点)と直線の距離が、円の半径と等しければよい。次の点と直線の距離の公式を用いる。

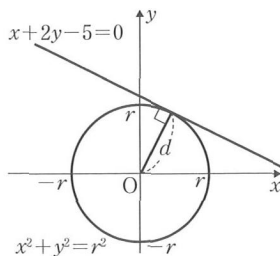
原点と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は $d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

解答 円の中心は原点であり、原点と直線 $x+2y-5=0$ の距離 d は

$$d = \frac{|-5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

円と直線が接するのは $r=d$ のときである。

よって $r = \sqrt{5}$ **答**



深める

教 p.91

教科書の例題 8 の r の値を、教科書の例題 7 のように判別式を利用して求めてみよう。また、接点の座標も求めてみよう。

指針 円と直線の位置関係 2つの方程式から y を消去した 2 次方程式の判別式を D として、練習 27(2) と同様の手順で考えればよい。ただし、 $r > 0$ であることに注意する。

解答 (前半) $x^2 + y^2 = r^2$ と $y = -3x + 10$ から y を消去して整理すると

$$10x^2 - 60x + (100 - r^2) = 0 \quad \dots\dots ①$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (-30)^2 - 10 \cdot (100 - r^2) \\ &= 10r^2 - 100 \end{aligned}$$

円と直線が接するのは、 $D=0$ のときである。

よって、 $r > 0$ で $10r^2 - 100 = 0$ から $r = \sqrt{10}$ **答**

(後半) ① に $r = \sqrt{10}$ を代入して整理すると

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

これを解くと $x = 3$

$x = 3$ を $y = -3x + 10$ に代入して $y = 1$

よって、接点の座標は $(3, 1)$ **答**

B 円の接線の方程式

教 p.93

練習
29

次の円上の点 P における接線の方程式を求めよ。

(1) $x^2 + y^2 = 10$, P(3, 1)

(2) $x^2 + y^2 = 13$, P(2, -3)

(3) $x^2 + y^2 = 16$, P(4, 0)

(4) $x^2 + y^2 = 5$, P(0, $-\sqrt{5}$)

指針 円上の点における接線の方程式 次の公式を用いる。

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 P(x_1 , y_1) における接線の方程式は $x_1x + y_1y = r^2$

解答 (1) $3x + 1 \cdot y = 10$ すなわち $3x + y = 10$ 答

(2) $2x + (-3)y = 13$ すなわち $2x - 3y = 13$ 答

(3) $4x + 0 \cdot y = 16$ すなわち $x = 4$ 答

(4) $0 \cdot x + (-\sqrt{5})y = 5$ すなわち $y = -\sqrt{5}$ 答

練習
30

教 p.93

点 A(2, 1) から円 $x^2 + y^2 = 1$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。指針 円外の点から引いた円の接線 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 (x_1 , y_1) における接線 $x_1x + y_1y = 1$ が点 A(2, 1) を通るように、 x_1 , y_1 の値を定める。

円外の 1 点を通る円の接線は 2 本あることに注意する。

解答 接点を P(x_1 , y_1) とすると、P は円上にあるから

$$x_1^2 + y_1^2 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、P における円の接線の方程式は

$$x_1x + y_1y = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

で、この直線が点 A(2, 1) を通るから

$$2x_1 + y_1 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①, ③ から y_1 を消去すると

$$x_1^2 + (1 - 2x_1)^2 = 1$$

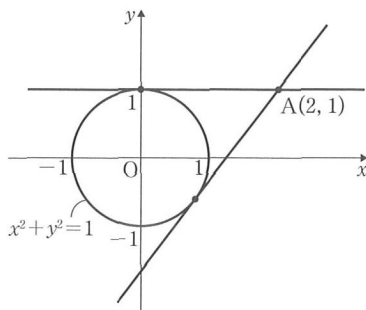
整理して $5x_1^2 - 4x_1 = 0$ これを解くと $x_1 = 0, \frac{4}{5}$

③ に代入して $x_1 = 0$ のとき $y_1 = 1$, $x_1 = \frac{4}{5}$ のとき $y_1 = -\frac{3}{5}$

よって、接線の方程式 ② と接点 P の座標は、次のようになる。

$0 \cdot x + 1 \cdot y = 1$ から 接線 $y = 1$, 接点 (0, 1)

$\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y = 1$ から 接線 $4x - 3y = 5$, 接点 $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ 答



7 2つの円

まとめ

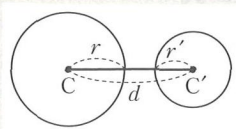
1 2つの円の位置関係

半径がそれぞれ r, r' である2つの円の中心 C, C' 間の距離を d とする。このとき、 $r > r'$ とすると、2つの円の位置関係は次のようになる。

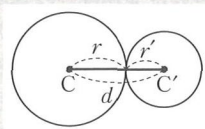
[1] 互いに外部にある

[2] 外接する

(1点を共有する)



$$d > r + r'$$



$$d = r + r'$$

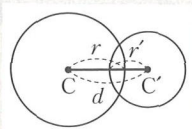
[3] 2点で交わる

[4] 内接する

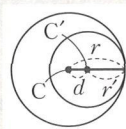
(1点を共有する)

[5] 一方が他方の

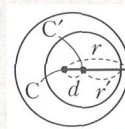
内部にある



$$r - r' < d < r + r'$$



$$d = r - r'$$



$$d < r - r'$$

[2], [4] のように2つの円がただ1つの共有点をもつとき、2つの円は **接する** といい、この共有点を **接点** という。[2] のように接する場合、2つの円は **外接する** という。[4] のように接する場合、2つの円は **内接する** という。

注意 $r = r'$ の場合も、[1]~[3] の位置関係と関係式は成り立つ。

2 2つの円の共有点の座標

2つの円が共有点をもつとき、その共有点の座標は、2つの円の方程式を連立させた連立方程式を解くことにより、求めることができる。

A 2つの円の位置関係

教 p.95

練習
31

円 $x^2 + y^2 = 4$ と次の円について、その位置関係を調べよ。

(1) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 9$

(2) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$

指針 2つの円の位置関係 上のまとめの [1]~[5] をもとに考える。2つの円の中心間の距離 d を求め、 $r + r'$ (半径の和) や $r - r'$ (半径の差) の値との大小を比較する。

解答 円 $x^2+y^2=4$ …… ① は中心が原点、半径が 2 の円である。

(1) $(x+3)^2+(y-4)^2=9$ …… ② とおく。

円 ② は中心が点 $(-3, 4)$ 、半径が 3 の円である。

また、2つの円 ①、② の中心間の距離を d とすると

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(-3)^2+4^2} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

d = 半径の和 = 5 であるから、2つの円 ①、

② は 外接する。 **答**

(2) $(x-3)^2+(y-3)^2=8$ …… ③ とおく。

円 ③ は中心が点 $(3, 3)$ 、半径が $2\sqrt{2}$ の円である。

また、2つの円 ①、③ の中心間の距離を d とすると

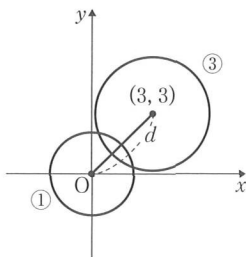
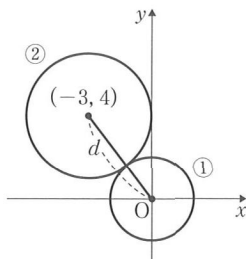
$$\begin{aligned} d &= \sqrt{3^2+3^2} \\ &= \sqrt{18} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

ここで、半径の差 $= 2\sqrt{2} - 2$ 、半径の和 $= 2\sqrt{2} + 2$ であり

$$2\sqrt{2} - 2 < 3\sqrt{2} < 2\sqrt{2} + 2$$

半径の差 $< d <$ 半径の和 であるから、2つの円 ①、③ は 2点で交わる。 **答**

補足 $2\sqrt{2} - 2 < 3\sqrt{2}$ は明らかである。また、 $\sqrt{2} < 2$ の両辺に $2\sqrt{2}$ を足すと、 $3\sqrt{2} < 2\sqrt{2} + 2$ になる。よって、 $2\sqrt{2} - 2 < 3\sqrt{2} < 2\sqrt{2} + 2$ である。



練習 32

教 p.95

中心が点 $(-3, 4)$ である円 C と、円 $x^2+y^2=1$ が内接するとき、円 C の方程式を求めよ。

指針 2つの円の位置関係と方程式 2つの円の半径を r, r' ($r > r'$)、中心間の距離を d とするとき、小さい方の円が大きい方の円に内接するのは、 $d = r - r'$ のときである。

解答 円 $x^2+y^2=1$ は中心が原点、半径が 1 の円である。

よって、2つの円の中心間の距離 d は $d = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5$

円 $x^2+y^2=1$ が円 C に内接するとき、円 C の半径を r とすると

$$5 = r - 1$$

よって $r = 5 + 1 = 6$

したがって、求める円 C の方程式は $(x+3)^2+(y-4)^2=36$ **答**

B 2つの円の共有点の座標

教 p.96

練習
33

次の2つの円の共有点の座標を求めよ。

$$x^2 + y^2 = 10, \quad x^2 + y^2 - 2x - y - 5 = 0$$

指針 2つの円の共有点の座標 2つの円の方程式を連立させて、連立2元2次方程式を次のように解けばよい。解は2組ある。

[1] 2つの円の方程式の辺々を引くと、 x, y の1次方程式が得られる。

[2] その1次方程式を x または y について解き、円の方程式のどちらかに代入して y か x を消去すると、2次方程式が得られる。

[3] [2]の2次方程式を解くと、解は異なる2つの実数解となる。それぞれの解を[1]の1次方程式に代入して、もう一方の文字の値を求める。

解答

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 - 2x - y - 5 = 0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ から } 2x + y + 5 = 10$$

$$\text{すなわち } y = -2x + 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ を $\textcircled{1}$ に代入すると

$$x^2 + (-2x + 5)^2 = 10$$

$$\text{整理すると } x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\text{これを解くと } (x-1)(x-3) = 0 \text{ から } x = 1, 3$$

$\textcircled{3}$ に代入して

$$x = 1 \text{ のとき } y = 3, \quad x = 3 \text{ のとき } y = -1$$

よって、共有点の座標は $(1, 3), (3, -1)$ **答**

補足 $\textcircled{3}$ の方程式は、2つの円の共有点を通る直線を表す。

研究 2つの円の交点を通る図形

まとめ

2つの円の交点を通る図形

$$2 \text{ つの円 } x^2 + y^2 + lx + my + n = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$x^2 + y^2 + l'x + m'y + n' = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$ の交点を A, B とするとき、 k を定数として、方程式 $k(x^2 + y^2 + lx + my + n) + (x^2 + y^2 + l'x + m'y + n') = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$ を考えると、この方程式が表す図形は2点 A, B を通り、 $k \neq -1$ のときは円、 $k = -1$ のときは直線となる。

注意 $\textcircled{C}$ は円 $\textcircled{A}$ を表すことはできない。

練習
1

2つの円 $x^2+y^2-4=0$, $x^2+y^2-4x+2y-6=0$ の2つの交点と点 $(1, 2)$ を通る円の方程式を求めよ。

指針 2つの円の交点を通る図形 求める円の方程式を

$$k(x^2+y^2-4)+(x^2+y^2-4x+2y-6)=0$$

とおき, $x=1$, $y=2$ を代入して, k の値を求める。

解答 k を定数として

$$k(x^2+y^2-4)+(x^2+y^2-4x+2y-6)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とすると, $\textcircled{1}$ は2つの円の交点を通る図形を表す。

$\textcircled{1}$ の表す図形が点 $(1, 2)$ を通るから, $\textcircled{1}$ に $x=1$, $y=2$ を代入すると

$$k(1^2+2^2-4)+(1^2+2^2-4 \cdot 1+2 \cdot 2-6)=0$$

よって $k=1$

$\textcircled{1}$ に代入して整理すると

$$x^2+y^2-2x+y-5=0 \quad \text{答}$$

3
章

図形と方程式

第3章 第2節

問題

9 円 $x^2+y^2+x-3y=0$ について, 次の問いに答えよ。

(1) この円の中心の座標と半径を求めよ。

(2) この円と中心が同じで点 $(2, 1)$ を通る円の方程式を求めよ。

指針 円の方程式

(1) 与えられた式を $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の形に変形する。

(2) (1) で求めた中心を (a, b) として

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

とおき, $x=2$, $y=1$ を代入して, r^2 の値を求める。

解答 (1) 方程式を変形すると

$$\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\left(y^2-3y+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}=0$$

$$\text{すなわち} \quad \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$$

よって, この円の 中心の座標は $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, 半径は $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 答

(2) 求める円の中心は点 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ であり, 半径を r とすると, 方程式は

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=r^2$$

とおける。

これが点 $(2, 1)$ を通るから

$$\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 = r^2$$

よって $r^2 = \frac{13}{2}$

したがって、求める円の方程式は

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{2} \quad \text{答}$$

教 p.98

- 10 3点 $A(-2, 1)$, $B(1, 4)$, $C(0, 5)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の外接円の半径と、外心の座標を求めよ。

指針 外接円の半径・外心 $\triangle ABC$ の3つの頂点を通る円を $\triangle ABC$ の外接円といい、その円の中心を $\triangle ABC$ の外心という。

外接円の方程式を $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とおき、 l, m, n についての連立方程式を解いて l, m, n の値を求めた後、 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ の形に変形し、半径と、中心(外心)の座標を求める。

解答 外接円の方程式を $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とする。

点 A, B, C を通るから

$$(-2)^2 + 1^2 + (-2)l + m + n = 0$$

$$1^2 + 4^2 + l + 4m + n = 0$$

$$5^2 + 5m + n = 0$$

整理すると

$$-2l + m + n + 5 = 0 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$l + 4m + n + 17 = 0 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$5m + n + 25 = 0 \quad \cdots \cdots \text{③}$$

$$\text{①} + \text{②} \times 2 \text{ から } 9m + 3n + 39 = 0$$

$$\text{すなわち } 3m + n + 13 = 0 \quad \cdots \cdots \text{④}$$

$$\text{③} - \text{④} \text{ から } 2m + 12 = 0 \quad \text{よって } m = -6$$

$$\text{④} \text{ に代入して } -18 + n + 13 = 0 \quad \text{よって } n = 5$$

$$\text{② から } l + 4 \cdot (-6) + 5 + 17 = 0 \quad \text{よって } l = 2$$

ゆえに、外接円の方程式は

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$$

$$\text{すなわち } (x+1)^2 + (y-3)^2 = 5$$

したがって、外接円の半径は $\sqrt{5}$ 、外心の座標は $(-1, 3)$ 答

- 11 直線 $y=x-2$ が円 $x^2+y^2=10$ によって切り取られてできる線分の長さを求めよ。

指針 円と直線(弦) 直線と円の2つの共有点の座標を求めて、2点間の距離を計算する。

解答 直線と円の交点の座標は、次の連立方程式の実数解である。

$$\begin{cases} y=x-2 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x^2+y^2=10 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①を②に代入して整理すると $x^2-2x-3=0$

これを解いて $x=-1, 3$

①から $x=-1$ のとき $y=-3$

$x=3$ のとき $y=1$

よって、直線①と円②の交点の座標は $(-1, -3), (3, 1)$

したがって、求める線分の長さは

$$\sqrt{\{3-(-1)\}^2+\{1-(-3)\}^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2} \quad \text{答}$$

- 12 円 $x^2+y^2=5$ $\cdots \cdots$ ①, 直線 $x+3y+c=0$ $\cdots \cdots$ ② が異なる2点で交わるとする。

(1) 定数 c の値の範囲を求めよ。

(2) $c=-5$ とする。このとき、円①と直線②の2つの共有点 A, B と原点 O の3点を通る円の方程式を求めよ。

指針 円と直線 ①, ②から x を消去し(本問では y を消去するより計算が楽になる), y についての2次方程式を作る。

(1) 異なる2点で交わる $\iff$ 判別式 $D>0$

(2) まず, $c=-5$ のときの2次方程式を解き, ①, ②の共有点の座標を求める。また, 求める円の方程式は, 原点を通ることから, $x^2+y^2+lx+my=0$ とおける。

解答 (1) ①, ②から x を消去すると

$$(-3y-c)^2+y^2=5 \quad \text{すなわち} \quad 10y^2+6cy+c^2-5=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

③の判別式を D とすると $\frac{D}{4}=(3c)^2-10(c^2-5)=-(c^2-50)$

①, ②が異なる2点で交わるのは, $D>0$ のときである。

よって, $c^2-50<0$ を解いて $-5\sqrt{2}<c<5\sqrt{2}$ 答

(2) ③において $c=-5$ とすると

$$10y^2-30y+20=0 \quad \text{すなわち} \quad y^2-3y+2=0$$

これを解くと $y=1, 2$

$x=-3y+5$ に代入して

$y=1$ のとき $x=2$, $y=2$ のとき $x=-1$

よって、共有点の座標は $(2, 1), (-1, 2)$

求める円は原点 O を通るから、その方程式を $x^2+y^2+lx+my=0$ とする。

点 $(2, 1)$ を通るから $2^2+1^2+2l+m=0$

点 $(-1, 2)$ を通るから $(-1)^2+2^2+(-1)l+2m=0$

整理すると $2l+m+5=0$, $-l+2m+5=0$

これを解くと $l=-1$, $m=-3$

したがって、求める円の方程式は

$$x^2+y^2-x-3y=0 \quad \text{答}$$

別解 (1) 円の半径を r とし、円の中心と直線の距離を d とする。

$$d < r \text{ から } \frac{|c|}{\sqrt{1^2+3^2}} < \sqrt{5}$$

$$\text{よって } |c| < 5\sqrt{2}$$

$$\text{したがって } -5\sqrt{2} < c < 5\sqrt{2} \quad \text{答}$$

(2) k を定数として、方程式

$$k(x+3y-5)+(x^2+y^2-5)=0 \quad \cdots \cdots \text{④}$$

を考えると、④は2点 A, B を通る円を表す。

④に $x=0, y=0$ を代入すると

$$-5k-5=0 \quad \text{すなわち } k=-1$$

④に代入して整理すると求める円の方程式は

$$x^2+y^2-x-3y=0 \quad \text{答}$$

教 p.98

13 点 $(4, 2)$ から円 $x^2+y^2=10$ に引いた2つの接線の接点を A, B とする。

(1) 2点 A, B の座標を求めよ。(2) 直線 AB の方程式を求めよ。

指針 **円の接線** 接線の公式 $x_1x+y_1y=r^2$ を利用する。接点 $P(x_1, y_1)$ は円上の点
 $\rightarrow x_1^2+y_1^2=10$ 接線 $x_1x+y_1y=10$ が点 $(4, 2)$ を通る $\rightarrow 4x_1+2y_1=10$
 この2つの方程式を連立させて解き、 x_1, y_1 を求める。

解答 (1) 接点を $P(x_1, y_1)$ とする。

$$P \text{ は円上にあるから } x_1^2+y_1^2=10 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$P \text{ における円の接線の方程式は } x_1x+y_1y=10$$

$$\text{この直線が点 } (4, 2) \text{ を通るから } 4x_1+2y_1=10$$

$$\text{すなわち } 2x_1+y_1=5 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{①, ② から } y_1 \text{ を消去して整理すると } x_1^2-4x_1+3=0$$

$$\text{これを解くと } x_1=1, 3$$

② から $x_1=1$ のとき $y_1=3$, $x_1=3$ のとき $y_1=-1$

よって、求める座標は $(1, 3), (3, -1)$ 答

(2) 求める方程式は $y-3=\frac{-1-3}{3-1}(x-1)$ から

$$2x+y-5=0 \quad \text{答}$$

別解 (2) $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ とすると, A, B における円 $x^2+y^2=10$ の接線の方程式はそれぞれ $x_1x+y_1y=10$, $x_2x+y_2y=10$

これら 2 本の接線が点 $(4, 2)$ を通るとすると

$$x_1 \cdot 4 + y_1 \cdot 2 = 10, \quad x_2 \cdot 4 + y_2 \cdot 2 = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで、直線 $4x+2y=10$ を考えると、 $\textcircled{3}$ からこの直線は 2 点 A, B を通る。

A, B は異なる 2 点であるから、直線 AB の方程式は $4x+2y=10$

すなわち、求める方程式は $2x+y-5=0$ 答

3章

図形と方程式

教 p.98

14 円 $(x+1)^2+(y-3)^2=r^2$ が円 $(x-2)^2+(y+1)^2=49$ の内部にあるとき、半径 r の値の範囲を求めよ。

指針 2つの円の位置関係 2円の半径を $r, r' (r>r')$, 中心間の距離を d とすると
一方の円が他方の円の内部にある $\iff d<r-r'$

解答 円 $(x+1)^2+(y-3)^2=r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$ の中心は $(-1, 3)$, 半径は r
円 $(x-2)^2+(y+1)^2=49 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$ の中心は $(2, -1)$, 半径は 7
よって、2つの円の中心間の距離 d は

$$d=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(-1-3)^2}=5$$

円 $\textcircled{1}$ が円 $\textcircled{2}$ の内部にあるとき $5<7-r$ すなわち $r<2$

また、 r は半径であるから $0<r$

したがって、半径 r の値の範囲は $0<r<2$ 答

教 p.98

15 円 $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ 上の点 P と点 $A(4, 6)$ との距離について、最大値と最小値を求めよ。また、2点 P, A 間の距離が最小となるとき点 P の座標を求めよ。

指針 円上の点と定点との距離の最大・最小 円の中心を C とするとき、円上の点 P と円外の点 A との距離 PA が最小になるのは、線分 CA と円との交点が P のときである。 PA が最大になるときについても、同様に考える。また、最小になるときの点 P の座標は、点 P が線分 CA の内分点であることから求めるのが簡単である。

解答 円 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$ は、中心が $C(1, 2)$ 、半径が 3 の円であり、
 $CA = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = 5$ である。

円上の点 P と点 A との距離 PA が最小になるのは、線分 CA と円との交点に P が一致するときである。

このとき $PA = CA - CP = 5 - 3 = 2$ **答**

また、距離 PA が最大になるのは、線分 CA の C の方への延長線と円との交点に P が一致するときである。

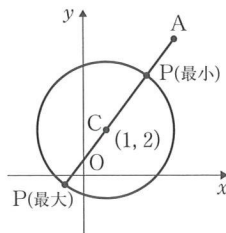
このとき $PA = CA + CP = 5 + 3 = 8$ **答**

さらに、距離 PA が最小になる点の点 P は、線分 CA を 3 : 2 に内分する点である。

$C(1, 2)$, $A(4, 6)$ から、求める点 P の座標は

$$\left(\frac{2 \times 1 + 3 \times 4}{3 + 2}, \frac{2 \times 2 + 3 \times 6}{3 + 2} \right)$$

すなわち $\left(\frac{14}{5}, \frac{22}{5} \right)$ **答**



第3節 軌跡と領域

8 軌跡と方程式

まとめ

1 軌跡

ある条件を満たしながら動く点が描く図形を、その条件を満たす点の軌跡という。

2 座標を用いて点の軌跡を求める手順

- 1 条件を満たす点 P の座標を (x, y) として、P に関する条件を x, y の式で表し、この方程式の表す図形が何かを調べる。
- 2 逆に、1 で求めた図形上のすべての点 P が、与えられた条件を満たすことを確かめる。

3 ともなって動く点の軌跡

点 Q がある条件を満たしながら動くとき、Q に対応して定まる点 P の軌跡を求めるには、 $P(x, y)$ 、 $Q(s, t)$ とし、Q の満たす条件を表す s, t の式と、P と Q の座標の関係式から、 x, y の方程式を導く。

A 座標平面上の点の軌跡

教 p.99

練習
34

2 点 $A(-1, 0)$ 、 $B(1, 0)$ に対して、 $AP^2 - BP^2 = 8$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

指針 座標平面上の点の軌跡 上のまとめにある軌跡を求める手順に従う。

AP^2 や BP^2 は、2 点間の距離の平方である。

解答 点 P の座標を (x, y) とすると

$$AP^2 = \{x - (-1)\}^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2$$

$$BP^2 = (x-1)^2 + y^2$$

$AP^2 - BP^2 = 8$ であるから

$$\{(x+1)^2 + y^2\} - \{(x-1)^2 + y^2\} = 8$$

整理すると $x=2$

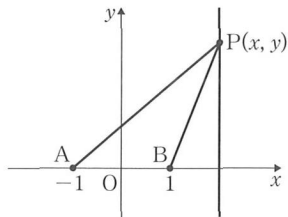
よって、点 P は直線 $x=2$ 上にある。

逆に、この直線上のすべての点 P について、 $AP^2 - BP^2 = 8$ が成り立つ。

したがって、点 P の軌跡は 直線 $x=2$ 答

補足 P(2, y) のとき

$$AP^2 - BP^2 = \{2 - (-1)\}^2 + y^2 - \{(2-1)^2 + y^2\} = 3^2 - 1^2 = 8$$

3
章

図形と方程式

練習
35

2点 $A(-3, 0)$, $B(2, 0)$ からの距離の比が $3:2$ である点 P の軌跡を求めよ。

指針 座標平面上の点の軌跡 点 P の座標を (x, y) とする。 P に関する条件は $AP:BP=3:2$ すなわち $2AP=3BP$ であるが、このままでは $\sqrt{\quad}$ が出てきて扱いにくいから、両辺を平方、すなわち $4AP^2=9BP^2$ として、 x, y の関係式を導く。

解答 点 P の座標を (x, y) とする。

P に関する条件は

$$AP:BP=3:2$$

$$\text{これより } 2AP=3BP$$

$$\text{すなわち } 4AP^2=9BP^2$$

$$AP^2=\{x-(-3)\}^2+y^2$$

$$=(x+3)^2+y^2$$

$$BP^2=(x-2)^2+y^2$$

を代入すると

$$4\{(x+3)^2+y^2\}=9\{(x-2)^2+y^2\}$$

各辺を展開して

$$4x^2+24x+36+4y^2=9x^2-36x+36+9y^2$$

$$\text{整理すると } x^2-12x+y^2=0$$

$$\text{すなわち } (x-6)^2+y^2=6^2$$

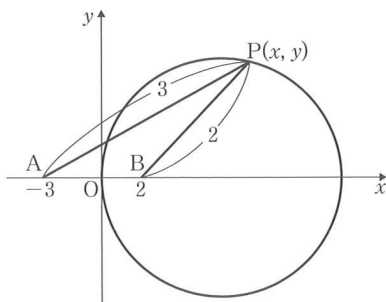
よって、点 P は円 $(x-6)^2+y^2=6^2$ 上にある。

逆に、この円上のすべての点 P は、条件を満たす。

したがって、求める軌跡は、

点 $(6, 0)$ を中心とする半径 6 の円である。 **答**

注意 一般に、2点 A, B からの距離の比が $m:n$ ($m \neq n$) である点 P の軌跡は円 (アポロニウスの円という) になる。この円は、線分 AB を $m:n$ に内分する点と外分する点を直径の両端とする円である。

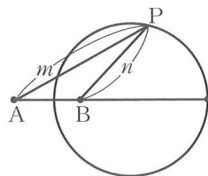


← 両辺を 5 で割る。

← 両辺に 6^2 を加える。

← ここまでの変形を逆になどると

$$AP:BP=3:2$$



B 線分の内分点の軌跡

教 p.101

練習
36

点 Q が直線 $y=x+2$ 上を動くとき、点 $A(1, 6)$ と点 Q を結ぶ線分 AQ を $2:1$ に内分する点 P の軌跡を求めよ。

指針 線分の内分点の軌跡 $P(x, y)$, $Q(s, t)$ とする。求めるのは点 P の軌跡であるから、 x と y の関係式を導くことが目的である。

直線 $y=x+2$ を ℓ とすると、 Q は直線 ℓ 上の点であるから、 $t=s+2$ を満たす。また、 $P(x, y)$ は線分 AQ を $2:1$ に内分する点であるから

$$x = \frac{1+2s}{2+1}, \quad y = \frac{6+2t}{2+1}$$

以上の3つの式から s, t を消去し、 x と y だけの関係式を導く。

解答 点 P, Q の座標を、それぞれ $(x, y), (s, t)$ とする。

Q は直線 $y=x+2$ 上にあるから

$$t=s+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、 P は線分 AQ を $2:1$ に内分する点であるから

$$x = \frac{1+2s}{2+1}, \quad y = \frac{6+2t}{2+1}$$

$$\text{すなわち} \quad s = \frac{3x-1}{2}, \quad t = \frac{3y-6}{2}$$

これらを $\textcircled{1}$ に代入して

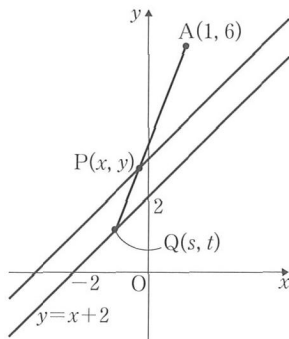
$$\frac{3y-6}{2} = \frac{3x-1}{2} + 2$$

整理すると $y=x+3$

よって、点 P は直線 $y=x+3$ 上にある。

逆に、この直線上のすべての点 P は、条件を満たす。

したがって、求める軌跡は、直線 $y=x+3$ である。 

3
章

図形と方程式

9 不等式の表す領域

まとめ

1 領域

座標平面上で、 x, y の不等式を満たす点 (x, y) 全体の集合を、その不等式の表す 領域 という。

2 直線と領域

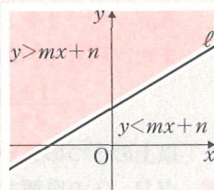
直線 $y=mx+n$ を ℓ とする。

1 不等式 $y>mx+n$ の表す領域は、

直線 ℓ の上側の部分

2 不等式 $y<mx+n$ の表す領域は、

直線 ℓ の下側の部分



注意 $y \geq mx+n$ や $y \leq mx+n$ の表す領域は、直線 $y=mx+n$ を含む。

3 円と領域

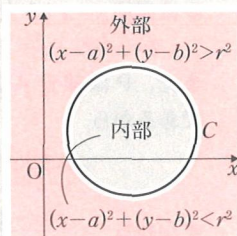
円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を C とする。

1 不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す領域は、

円 C の 内部

2 不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ の表す領域は、

円 C の 外部



注意 $(x-a)^2+(y-b)^2 \leq r^2$ や

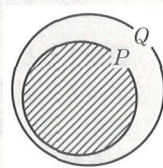
$(x-a)^2+(y-b)^2 \geq r^2$ の表す領域は、

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を含む。

4 領域を利用した証明

2つの条件 p, q について、条件 p を満たすものの全体の集合を P 、条件 q を満たすものの全体の集合を Q とすると、次が成り立つ。

「 p ならば q が真である」 $\iff$ 「 $P \subset Q$ が成り立つ」



A 直線を境界線とする領域

練習 37

次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $3x+y+2 \leq 0$

(2) $2x-3y+6 \leq 0$

(3) $y > 2$

(4) $x \leq -1$

教 p.103

指針 直線と領域 $ax+by+c \leq 0$ などのような形で不等式が与えられたときは、まず y について解き、 $y \leq \sim$ などの形に変形する。

(3) $y > k$ の表す領域は 直線 $y=k$ の上側の部分、

$y < k$ の表す領域は 直線 $y = k$ の下側の部分である。

(4) $x > k$ の表す領域は 直線 $x = k$ の右側の部分、

$x < k$ の表す領域は 直線 $x = k$ の左側の部分である。

$\geq$, $\leq$ のときは境界線を含み, $>$, $<$ のときは境界線を含まない。

解答 (1) 不等式を変形すると

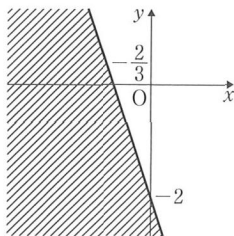
$$y \leq -3x - 2$$

したがって、この領域は、直線

$y = -3x - 2$ およびその下側の部分で、

図の斜線部分である。

ただし、境界線を含む。



(2) 不等式を変形すると

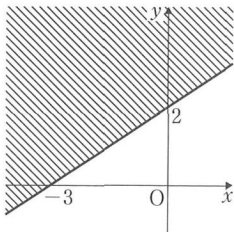
$$y \geq \frac{2}{3}x + 2$$

したがって、この領域は、直線

$y = \frac{2}{3}x + 2$ およびその上側の部分で、

図の斜線部分である。

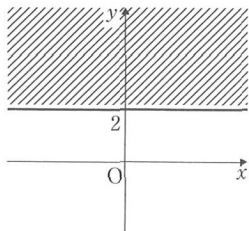
ただし、境界線を含む。



(3) この領域は、 y 座標が 2 より大きい点 (x, y) 全体の集合である。

したがって、この領域は、直線 $y = 2$ の上側の部分で、図の斜線部分である。

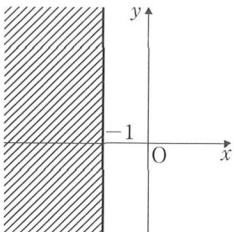
ただし、境界線を含まない。



(4) この領域は、 x 座標が -1 以下の点 (x, y) 全体の集合である。

したがって、この領域は、直線 $x = -1$ およびその左側の部分で、図の斜線部分である。

ただし、境界線を含む。



B 円を境界線とする領域

教 p.104

練習
38

次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $x^2 + y^2 < 4$

(2) $x^2 + y^2 \geq 6$

(3) $(x+2)^2 + y^2 \leq 4$

(4) $(x-1)^2 + (y+3)^2 > 9$

指針 円と領域 座標平面は、1つの円によって2つの領域に分かれる。

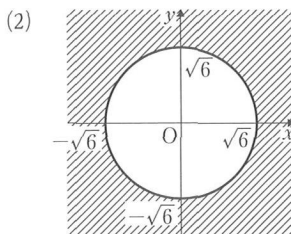
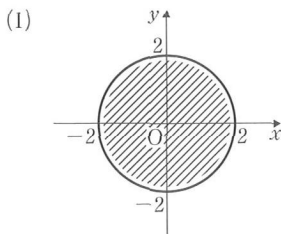
$\sim < r^2$ ならば内部、 $\sim > r^2$ ならば外部。 $\sim \leq r^2$ 、 $\sim \geq r^2$ なら円も含めた内部、または外部である。

解答 (1) この領域は、円 $x^2 + y^2 = 2^2$ の内部である。

すなわち、図の斜線部分である。ただし、境界線を含まない。

(2) この領域は、円 $x^2 + y^2 = (\sqrt{6})^2$ およびその外部である。

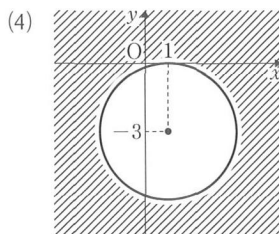
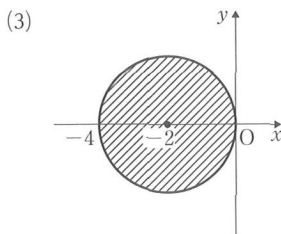
すなわち、図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。

(3) この領域は、円 $(x+2)^2 + y^2 = 2^2$ およびその内部である。

すなわち、図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。

(4) この領域は、円 $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 3^2$ の外部である。

すなわち、図の斜線部分である。ただし、境界線を含まない。

**注意** 円の中心の座標を代入したとき、不等式が成り立てば、その不等式の表す領域は円の内部である。成り立たなければ外部である。

C 連立不等式の表す領域

教 p.106

練習
39

次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

(1)
$$\begin{cases} x-y+1>0 \\ 2x+y-1>0 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} x+y-3\leq 0 \\ 4x-y-2\geq 0 \end{cases}$$

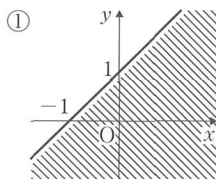
(3)
$$\begin{cases} x^2+y^2<25 \\ 3x-y+3<0 \end{cases}$$

(4)
$$\begin{cases} (x+1)^2+y^2\geq 1 \\ x+2y+2\geq 0 \end{cases}$$

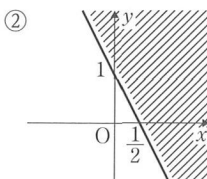
3
章

図形と方程式

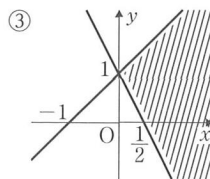
指針 連立不等式の表す領域 それぞれの不等式の表す領域に共通する部分を求める。たとえば(1)では、不等式は $y < x+1$, $y > -2x+1$ と変形され、それぞれの領域は図の ①, ② であり、その共通する部分は ③ のようになる。



$$x-y+1>0$$



$$2x+y-1>0$$

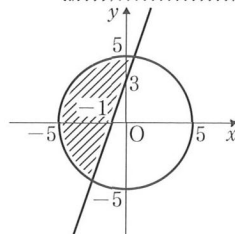
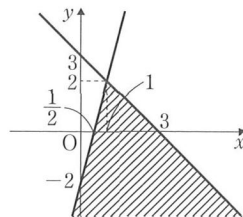
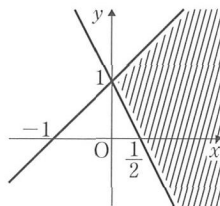


$$\begin{cases} x-y+1>0 \\ 2x+y-1>0 \end{cases}$$

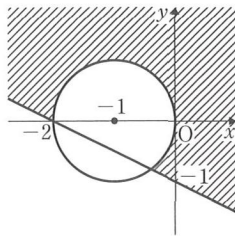
解答 (1) この領域は、
直線 $x-y+1=0$ の下側の部分と
直線 $2x+y-1=0$ の上側の部分
の共通部分である。
すなわち、図の斜線部分である。
ただし、境界線を含まない。

(2) この領域は、
直線 $x+y-3=0$ およびその下側の部分と
直線 $4x-y-2=0$ およびその下側の部分
の共通部分である。
すなわち、図の斜線部分である。
ただし、境界線を含む。

(3) この領域は、
円 $x^2+y^2=5^2$ の内部と
直線 $3x-y+3=0$ の上側の部分
の共通部分である。
すなわち、図の斜線部分である。
ただし、境界線を含まない。



- (4) この領域は、
 円 $(x+1)^2 + y^2 = 1^2$ およびその外部と
 直線 $x+2y+2=0$ およびその上側の部分
 の共通部分である。
 すなわち、図の斜線部分である。
 ただし、境界線を含む。



参考 座標平面は、交わる2直線あるいは交わる円と直線によって、4つの領域に分けられる。連立不等式の表す領域は、そのうちの1つの部分である。

練習
40

教 p.106

次の不等式の表す領域を図示せよ。

- (1) $(x+y)(x-y+1) < 0$ (2) $(x+y+2)(x+y-1) \geq 0$

指針 $AB > 0$ の形の不等式が表す領域 不等式の次の性質を利用する。

- (1) $AB < 0 \iff \begin{cases} A > 0 \\ B < 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} A < 0 \\ B > 0 \end{cases}$ $\leftarrow$ 2つの連立不等式
- (3) $AB \geq 0 \iff \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} A \leq 0 \\ B \leq 0 \end{cases}$

解答 (1) 不等式 $(x+y)(x-y+1) < 0$ が成り立つことは

$$\begin{cases} x+y > 0 & \leftarrow y > -x \\ x-y+1 < 0 & \leftarrow y > x+1 \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

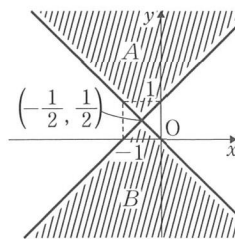
または

$$\begin{cases} x+y < 0 & \leftarrow y < -x \\ x-y+1 > 0 & \leftarrow y < x+1 \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つことと同じである。

よって、求める領域は、①の表す領域 A と

②の表す領域 B の和集合 $A \cup B$ であり、図の斜線部分である。ただし、境界線を含まない。



- (2) 不等式 $(x+y+2)(x+y-1) \geq 0$ が成り立つことは

$$\begin{cases} x+y+2 \geq 0 & \leftarrow y \geq -x-2 \\ x+y-1 \geq 0 & \leftarrow y \geq -x+1 \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

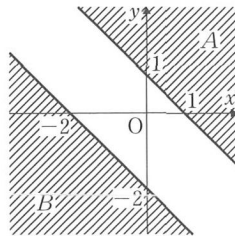
または

$$\begin{cases} x+y+2 \leq 0 & \leftarrow y \leq -x-2 \\ x+y-1 \leq 0 & \leftarrow y \leq -x+1 \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つことと同じである。

よって、求める領域は、①の表す領域 A と

②の表す領域 B の和集合 $A \cup B$ であり、図の斜線部分である。ただし、境



界線を含む。

参考 $xy > 0 \iff \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$ であるから、 $xy > 0$ の表す領域は、

第1象限および第3象限であり、隣り合わない2つの領域である。

同様にして、 $xy < 0$ の表す領域は、第2象限および第4象限であり、やはり隣り合わない2つの領域である。

D 領域と最大・最小

教 p.107

練習
41

x, y が4つの不等式 $x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 10, 2x - 3y \geq -6$ を同時に満たすとき、 $x + y$ の最大値、最小値を求めよ。

指針 領域と最大・最小 $x + y = k$ とおくと、これは傾きが -1 、 y 切片が k の直線を表す。この直線が連立不等式の表す領域と共有点をもつときの k の値の範囲を調べる。

解答 与えられた連立不等式の表す領域を A とする。

領域 A は4点

$(0, 0), (5, 0), (3, 4), (0, 2)$

を頂点とする四角形の周および内部である。

$x + y = k$ …… ①

とおくと、 $y = -x + k$ であり、これは傾きが -1 、 y 切片が k である直線を表す。

この直線 ① が領域 A と共有点をもつときの k の値の最大値、最小値を求めればよい。

領域 A においては、直線 ① が

点 $(3, 4)$ を通るとき k は最大で、そのとき $k = 7$

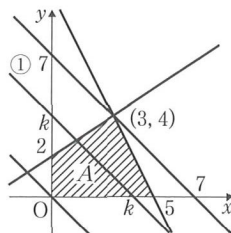
点 $(0, 0)$ を通るとき k は最小で、そのとき $k = 0$

である。

したがって、 $x + y$ は

$x = 3, y = 4$ のとき最大値 7 をとり、

$x = 0, y = 0$ のとき最小値 0 をとる。 **答**



深
め
る

教 p.107

x, y が教科書の応用例題7の4つの不等式を同時に満たすとき、 $3x + y$ が最大値をとるような x, y の値を求めよう。

指針 領域と最大・最小 $3x + y = k$ とおくと、 $y = -3x + k$ であり、傾きが -3 、 y 切片が k である直線を表す。この直線が連立不等式の表す領域と共有点をも

つときのうち、 k の値が最大となる場合を考える。

解答 与えられた連立不等式の表す領域を A とする。
領域 A は 4 点 $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(3, 2)$, $(0, 4)$ を
頂点とする四角形の周および内部である。

$$3x + y = k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

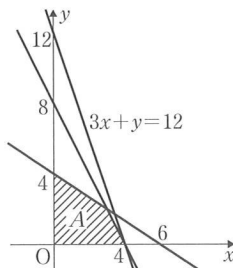
とおくと、 $y = -3x + k$ であり、これは傾きが
 -3 、 y 切片が k である直線を表す。

この直線 $\textcircled{1}$ が領域 A と共有点をもつときのう
ち、 k の値が最大となるときの x , y の値を求め
ればよい。

領域 A においては、図のように、直線 $\textcircled{1}$ が点 $(4, 0)$ を通るとき k は最大と
なる。

したがって $x=4$, $y=0$ **答**

補足 $3x+y$ の最大値は $3 \cdot 4 + 0 = 12$ である。



E 領域を利用した証明

教 p.108

練習
42

x , y は実数とする。次のことを証明せよ。

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{ならば} \quad x + y \leq \sqrt{2}$$

指針 領域を利用した証明 不等式 $x^2 + y^2 \leq 1$ の表す領域を P , 不等式 $x + y \leq \sqrt{2}$ の表す領域を Q とするとき、 $P \subset Q$ であることを示せばよい。

解答 不等式 $x^2 + y^2 \leq 1$ の表す領域を P , 不等式
 $x + y \leq \sqrt{2}$ の表す領域を Q とする。

P は円 $x^2 + y^2 = 1$ およびその内部、 Q は直
線 $x + y = \sqrt{2}$ およびその下側の部分である。

また、原点と直線 $x + y = \sqrt{2}$ の距離は

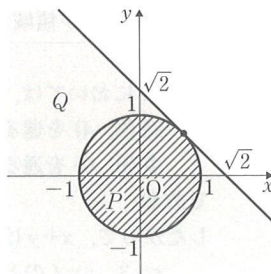
$$\frac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 1 \quad \text{であるから、円 } x^2 + y^2 = 1 \quad \text{と}$$

直線 $x + y = \sqrt{2}$ は接する。

よって、それぞれの不等式の表す領域は図

のようになり、 $P \subset Q$ が成り立つ。

したがって、 $x^2 + y^2 \leq 1$ ならば $x + y \leq \sqrt{2}$ である。 **終**



研究 放物線を境界線とする領域

まとめ

関数 $y=f(x)$ のグラフと領域関数 $y=f(x)$ のグラフを F とする。不等式 $y>f(x)$ の表す領域は、曲線 F の上側の部分である。不等式 $y<f(x)$ の表す領域は、曲線 F の下側の部分である。**注意** $y\geq f(x)$ や $y\leq f(x)$ の表す領域は、曲線 F を含む。3
章

図形と方程式

練習
1

教 p.109

次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $y>x^2-4x+3$

(2) $y\leq 1-x^2$

指針 放物線を境界線とする領域

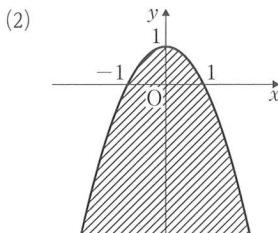
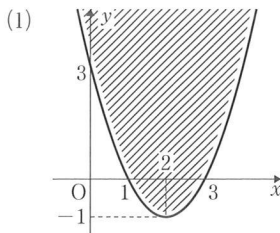
- (1) 不等式 $y>f(x)$ の表す領域は、曲線 $y=f(x)$ の上側の部分である。ただし、境界線を含まない。
- (2) 不等式 $y\leq f(x)$ の表す領域は、曲線 $y=f(x)$ およびその下側の部分である。ただし、境界線を含む。

解答 (1) $y=x^2-4x+3$ を変形すると $y=(x-2)^2-1$ $y>x^2-4x+3$ の表す領域は、放物線 $y=(x-2)^2-1$ の上側の部分で、図の斜線部分である。

ただし、境界線を含まない。

(2) $y=1-x^2$ を変形すると $y=-x^2+1$ $y\leq 1-x^2$ の表す領域は、放物線 $y=-x^2+1$ およびその下側の部分で、図の斜線部分である。

ただし、境界線を含む。



第3章 第3節

問題

教 p.110

- 16 2点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ に対して, $AP^2 + BP^2 = 10$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

指針 座標平面上の点の軌跡 次の手順に従って求める。

- [1] 条件を満たす点 P の座標を $P(x, y)$ として, P に関する条件を x, y の方程式で表し, この方程式が表す図形が何かを調べる。
 [2] 逆に, [1] で求めた図形上のすべての点 P が, 与えられた条件を満たすことを確かめる。

解答 点 P の座標を (x, y) とすると

$$AP^2 = \{x - (-1)\}^2 + \{y - 0\}^2$$

$$= (x+1)^2 + y^2$$

$$BP^2 = (x-1)^2 + \{y - 0\}^2$$

$$= (x-1)^2 + y^2$$

$AP^2 + BP^2 = 10$ であるから

$$\{(x+1)^2 + y^2\} + \{(x-1)^2 + y^2\} = 10$$

整理すると $2x^2 + 2y^2 + 2 = 10$

$$x^2 + y^2 = 4$$

よって, 点 P は円 $x^2 + y^2 = 2^2$ 上にある。

逆に, この円上のすべての点 P について $AP^2 + BP^2 = 10$ が成り立つ。

ゆえに, 点 P の軌跡は, 原点を中心とする半径 2 の円である。 答

教 p.110

- 17 直線 $3x - 2y - 4 = 0$ に対して, 点 $P(1, -2)$ と同じ側にある点を, 次の中から選べ。

原点 O , $A(-2, -6)$, $B(-1, 3)$, $C(3, 2)$

指針 直線と領域 各点が直線 $3x - 2y - 4 = 0$ に対して $3x - 2y - 4 > 0$, $3x - 2y - 4 < 0$ のどちらの領域にあるかを調べる。

解答 $3x - 2y - 4$ に, 点 P の座標 $x=1, y=-2$ を代入すると

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) - 4 = 3 > 0$$

であるから, 点 P は不等式 $3x - 2y - 4 > 0$ の表す領域にある。

同様に, その他の点について, $3x - 2y - 4$ の符号を調べると

原点 $O(0, 0)$ について $3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 4 = -4 < 0$

$A(-2, -6)$ について $3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-6) - 4 = 2 > 0$

$B(-1, 3)$ について $3 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 - 4 = -13 < 0$

$$C(3, 2) \text{ について} \quad 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 4 = 1 > 0$$

であるから、 $3x - 2y - 4 > 0$ の表す領域にある点は A, C である。

よって、直線 $3x - 2y - 4 = 0$ に対して、点 P と同じ側にある点は

A, C 答

教 p.110

18 次の不等式の表す領域を図示せよ。

$$(1) \quad 1 \leq x + y \leq 3$$

$$(2) \quad 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$$

指針 不等式 $A \leq B \leq C$ の表す領域 $A \leq B$ かつ $B \leq C$ を表すから、連立不等式

$$\begin{cases} A \leq B \\ B \leq C \end{cases} \text{ の表す領域と考えればよい。}$$

解答 (1) この不等式の表す領域は

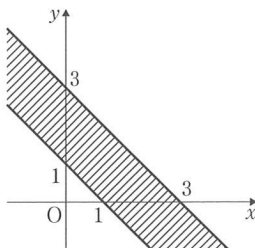
直線 $x + y = 1$ およびその上側の部分と

直線 $x + y = 3$ およびその下側の部分

の共通部分である。

すなわち、図の斜線部分である。

ただし、境界線を含む。



(2) この不等式の表す領域は

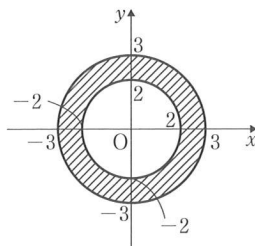
円 $x^2 + y^2 = 2^2$ およびその外部と

円 $x^2 + y^2 = 3^2$ およびその内部

の共通部分である。

すなわち、図の斜線部分である。

ただし、境界線を含む。



教 p.110

19 次の不等式の表す領域を図示せよ。

$$(3x - y - 5)(x^2 + y^2 - 25) \geq 0$$

指針 不等式 $AB \geq 0$ の表す領域 不等式の次の性質を利用する。

$$AB \geq 0 \iff \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} A \leq 0 \\ B \leq 0 \end{cases}$$

解答 不等式 $(3x - y - 5)(x^2 + y^2 - 25) \geq 0$ が成り立つことは

$$\begin{cases} 3x - y - 5 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 25 \geq 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} 3x - y - 5 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 25 \leq 0 \end{cases}$$

が成り立つことと同じである。

$$\begin{cases} 3x-y-5 \geq 0 \\ x^2+y^2-25 \geq 0 \end{cases} \text{の表す領域は}$$

直線 $3x-y-5=0$ およびその下側の部分と

円 $x^2+y^2-25=0$ およびその外部

の共通部分である。

$$\begin{cases} 3x-y-5 \leq 0 \\ x^2+y^2-25 \leq 0 \end{cases} \text{の表す領域は}$$

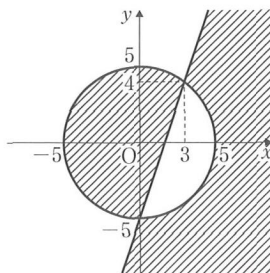
直線 $3x-y-5=0$ およびその上側の部分と

円 $x^2+y^2-25=0$ およびその内部

の共通部分である。

よって、求める領域は図の斜線部分である。

ただし、境界線を含む。



教 p.110

- 20 不等式 $x^2+y^2 \leq 1$ を満たす x, y に対して、 $x+y$ の最大値および最小値と、そのときの x, y の値を求めよ。

指針 領域と最大・最小 $x+y=k$ とおくと、これは傾きが -1 、 y 切片が k の直線を表す。この直線が不等式 $x^2+y^2 \leq 1$ の表す領域と共有点をもつときの k の値の範囲を調べる。

解答 不等式 $x^2+y^2 \leq 1$ の表す領域を A とすると、 A は円 $x^2+y^2=1$ の周および内部である。

$$x+y=k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とおくと、これは傾きが -1 、 y 切片が k である直線を表す。

この直線 $\textcircled{1}$ が領域 A と共有点をもつときの k の最大値、最小値を求めればよい。

直線 $\textcircled{1}$ が円 $x^2+y^2=1$ と接するとき、図のように接点を P, Q とすると、 $OP=OQ=1$ で、直角二等辺三角形の辺の比が $1:1:\sqrt{2}$ であることから、

$$\text{直線 } \textcircled{1} \text{ が点 } P \text{ で円と接するとき} \quad k=\sqrt{2} \quad \left(\text{このとき } x=y=\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

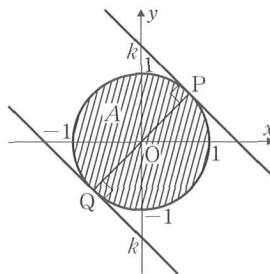
$$\text{直線 } \textcircled{1} \text{ が点 } Q \text{ で円と接するとき} \quad k=-\sqrt{2} \quad \left(\text{このとき } x=y=-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

であり、これらは、 k のとり得る値の最大値、最小値になる。

したがって、 $x+y$ は

$$x=y=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ のとき最大値 } \sqrt{2} \text{ をとり、}$$

$$x=y=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ のとき最小値 } -\sqrt{2} \text{ をとる。} \quad \text{答}$$



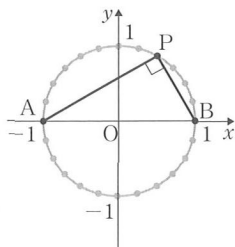
21 A(-1, 0), B(1, 0) とする。

(1) 次が成り立つことを示せ。

点 P が $\angle APB=90^\circ$ を満たすならば点 P は原点を中心とする半径 1 の円上にある。

(2) 次が成り立たないことを示せ。

点 P が原点を中心とする半径 1 の円上にあるならば点 P は $\angle APB=90^\circ$ を満たす。



指針 除かれる点がある軌跡

(1) $\triangle PAB$ は AB を斜辺とする直角三角形であるから、 $AP^2+BP^2=AB^2$ が成り立つ。P(x, y) とおき、x, y についての関係式を求める。

(2) 原点を中心とする半径 1 の円上にあるのに、 $\angle APB=90^\circ$ とならない点はあるかを考える。

解答 (1) 点 P の座標を (x, y) とする。

$\angle APB=90^\circ$ より、 $\triangle PAB$ は AB を斜辺とする直角三角形であるから

$$AP^2+BP^2=AB^2$$

$$\text{よって } \{x-(-1)\}^2+y^2+(x-1)^2+y^2=2^2$$

$$\text{整理すると } x^2+y^2=1$$

したがって、点 P が $\angle APB=90^\circ$ を満たすならば点 P は原点を中心とする半径 1 の円上にある。 **終**

(2) 点 A, 点 B は原点を中心とする半径 1 の円上にあるが、点 P が点 A または点 B と一致するとき、 $\angle APB=90^\circ$ を満たさない。

したがって、

「点 P が原点を中心とする半径 1 の円上にあるならば点 P は $\angle APB=90^\circ$ を満たす。」

は成り立たない。 **終**

補足 (1), (2) から、次の結論が得られる。

A(-1, 0), B(1, 0) に対し、 $\angle APB=90^\circ$ を満たす点 P の軌跡は、原点を中心とする半径 1 の円(ただし、点 A, B を除く)である。

第3章 章末問題A

教 p.111

1. 三角形の各辺の中点の座標が、 $(-1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$ であるとき、この三角形の3つの頂点の座標を求めよ。

指針 中点の座標 三角形の頂点を $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ とおき、辺 AB , BC , CA の中点がそれぞれ $(-1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$ であるとして、 x 座標、 y 座標のそれぞれについて連立3元1次方程式を作る。

解答 三角形の頂点を $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ とし、辺 AB , BC , CA の中点がそれぞれ $P(-1, 1)$, $Q(1, 2)$, $R(2, 0)$ であるとする。

P , Q , R の x 座標について

$$\begin{cases} \frac{x_1+x_2}{2} = -1 \\ \frac{x_2+x_3}{2} = 1 \\ \frac{x_3+x_1}{2} = 2 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x_1+x_2 = -2 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x_2+x_3 = 2 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ x_3+x_1 = 4 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$(\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3}) \div 2 \text{ から } x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{4} \text{ から } x_1 = 0 \quad \textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ から } x_2 = -2 \quad \textcircled{1}, \textcircled{4} \text{ から } x_3 = 4$$

P , Q , R の y 座標について

$$\begin{cases} \frac{y_1+y_2}{2} = 1 \\ \frac{y_2+y_3}{2} = 2 \\ \frac{y_3+y_1}{2} = 0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} y_1+y_2 = 2 & \cdots \cdots \textcircled{5} \\ y_2+y_3 = 4 & \cdots \cdots \textcircled{6} \\ y_3+y_1 = 0 & \cdots \cdots \textcircled{7} \end{cases}$$

$$(\textcircled{5} + \textcircled{6} + \textcircled{7}) \div 2 \text{ から } y_1 + y_2 + y_3 = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{6}, \textcircled{8} \text{ から } y_1 = -1 \quad \textcircled{7}, \textcircled{8} \text{ から } y_2 = 3 \quad \textcircled{5}, \textcircled{8} \text{ から } y_3 = 1$$

以上により $A(0, -1)$, $B(-2, 3)$, $C(4, 1)$

したがって、求める3つの頂点の座標は

$$(0, -1), (-2, 3), (4, 1) \quad \text{答}$$

教 p.111

2. 2直線 $ax+3y+1=0$, $2x+(a-1)y=0$ が平行であるとき、および垂直であるときの定数 a の値を、それぞれ求めよ。

指針 2直線の平行, 垂直 まず、 $a=1$ の場合の2直線の位置関係を確認する。次に、 $a \neq 1$ としてそれぞれの傾きを求め、「平行 $\iff$ 傾きが等しい」、
「垂直 $\iff$ 傾きの積が -1 」を用いて、 a の値を求める。

解答 $a=1$ のとき、2 直線は $x+3y+1=0$, $x=0$ となり、平行でも垂直でもないから、 $a \neq 1$ である。

このとき、2 直線の傾きは $-\frac{a}{3}$, $-\frac{2}{a-1}$

2 直線が平行であるとき $-\frac{a}{3} = -\frac{2}{a-1}$

式を整理すると $a^2 - a - 6 = 0$

これを解いて $a = -2, 3$ **答**

2 直線が垂直であるとき $\left(-\frac{a}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{a-1}\right) = -1$

式を整理すると $5a - 3 = 0$

これを解いて $a = \frac{3}{5}$ **答**

参考 2 直線 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ について、

2 直線が平行 $\iff ab' - ba' = 0$

2 直線が垂直 $\iff aa' + bb' = 0$

から、次のように解いてもよい。

別解 2 直線が平行になるのは、 $a(a-1) - 3 \cdot 2 = 0$ のときである。

よって $a^2 - a - 6 = 0$

これを解いて $a = -2, 3$ **答**

2 直線が垂直になるのは、 $a \cdot 2 + 3(a-1) = 0$ のときである。

よって $5a - 3 = 0$

これを解いて $a = \frac{3}{5}$ **答**

研究

教 p.111

3. k は定数とする。直線 $(2k+3)x + (k-4)y - 4k + 5 = 0$ は、 k の値に関係なく定点を通る。その定点の座標を求めよ。また、この直線が点 $(-1, 0)$ を通るように、 k の値を定めよ。

指針 定点を通る直線 $(2k+3)x + (k-4)y - 4k + 5 = 0$ …… ① とおけば、① が任意の k について成り立つような x, y の値が、この直線が k の値に関係なく通る定点の座標である。よって、① を k について整理し、その等式が恒等式となるような x, y の値を求めればよい。

解答 $(2k+3)x + (k-4)y - 4k + 5 = 0$ …… ①

とする。① を k について整理すると

$$k(2x+y-4) + (3x-4y+5) = 0 \quad \text{…… ②}$$

これが k の値に関係なく成り立つから、② は k についての恒等式である。

$2x+y-4=0$, $3x-4y+5=0$ を連立方程式として解くと $x=1, y=2$

よって、求める定点の座標は $(1, 2)$ **答**

また、①に $x=-1$, $y=0$ を代入すると

$$-(2k+3)+(k-4)\cdot 0-4k+5=0$$

これを解いて $k=\frac{1}{3}$ 答

教 p.111

4. 3点 $O(0, 0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ を頂点とする $\triangle OAB$ がある。

(1) 点 B と直線 OA の距離を x_1, y_1, x_2, y_2 を用いて表せ。

(2) $\triangle OAB$ の面積は、 $\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$ で表されることを示せ。

指針 点と直線の距離と三角形の面積

(1) 直線 OA の方程式を求め、点と直線の距離の公式を利用する。

(2) 辺 OA を底辺とすると、(1) で求めた距離が高さになる。

解答 (1) $x_1 \neq 0$ のとき、直線 OA の式は $y=\frac{y_1}{x_1}x$

すなわち $y_1x-x_1y=0$ これは $x_1=0$ のときも成り立つ。

よって、点 $B(x_2, y_2)$ と直線 $y_1x-x_1y=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|y_1x_2-x_1y_2|}{\sqrt{y_1^2+(-x_1)^2}}=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} \quad \text{答}$$

(2) $\triangle OAB$ の底辺を OA とすると、高さは(1)の距離 d である。

$$\text{よって} \quad \triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot d$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x_1^2+y_1^2} \cdot \frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

$$= \frac{1}{2} |x_1y_2-x_2y_1| \quad \text{終}$$

教 p.111

5. 直線 $x-y+2=0$ が円 $x^2+(y-1)^2=25$ によって切り取られてできる線分の長さを求めよ。

指針 円と直線(弦) 直線と円の共有点の座標を求めて計算する。

解答 $\begin{cases} y=x+2 & \cdots \cdots \text{①} \\ x^2+(y-1)^2=25 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$ とする。

①を②に代入して整理すると $x^2+x-12=0$

これを解いて $x=-4, 3$

①から $x=-4$ のとき $y=-2$

$x=3$ のとき $y=5$

よって、直線①と円②の交点の座標は $(-4, -2), (3, 5)$

したがって、求める線分の長さは

$$\sqrt{\{3-(-4)\}^2+\{5-(-2)\}^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2} \quad \text{答}$$

参考 円の中心と直線の距離を d 、円の半径を r とすると、円の中心を通る弦の垂線は弦を 2 等分することから、弦の長さは $2\sqrt{r^2-d^2}$ となる。このことを利用すると、次のようになる。

別解 直線 ① の方程式は $x-y+2=0$ であるから、円 ② の中心 $(0, 1)$ と直線 ① の

$$\text{距離は } \frac{|0-1+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

円 ② の半径は 5 であるから、求める線分の長さは

$$2\sqrt{5^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=2\sqrt{\frac{49}{2}}=7\sqrt{2} \quad \text{答}$$

教 p.111

6. 点 $C(2, 1)$ を中心として、直線 $x+2y+1=0$ に接する円の方程式を求めよ。

指針 直線に接する円 求める円の半径は $C(2, 1)$ と直線 $x+2y+1=0$ の距離に等しい。

解答 求める円の半径を r とする。

この円は直線 $x+2y+1=0$ に接するから、 r は中心 $C(2, 1)$ と直線の距離に等しい。

$$\text{よって } r=\frac{|1\cdot 2+2\cdot 1+1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$$\leftarrow d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

したがって、求める円の方程式は

$$(x-2)^2+(y-1)^2=(\sqrt{5})^2$$

$$\text{すなわち } (x-2)^2+(y-1)^2=5 \quad \text{答}$$

教 p.111

7. 点 $A(2, 1)$ に関して点 $Q(a, b)$ と対称な点を P とする。

(1) P の座標を a, b を用いて表せ。

(2) Q が直線 $2x+y+1=0$ 上を動くとき、 P の軌跡を求めよ。

指針 線分の中点と軌跡

(1) $P(x, y)$ とし、点 A が線分 PQ の中点であることを式に表す。

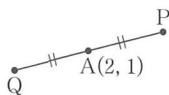
(2) まず、 Q の条件から a, b の関係式を導く。次に、 a, b を x, y を用いて表し、求めた関係式に代入する。

解答 (1) P の座標を (x, y) とする。

点 $A(2, 1)$ は線分 PQ の中点であるから

$$2=\frac{x+a}{2}, \quad 1=\frac{y+b}{2}$$

$$\text{すなわち } x=4-a \quad \cdots \cdots \text{ ①}, \quad y=2-b \quad \cdots \cdots \text{ ②}$$



よって、P の座標は $(4-a, 2-b)$ 答

(2) $Q(a, b)$ は直線 $2x+y+1=0$ 上にあるから

$$2a+b+1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①, ② から $a=4-x, b=2-y$

これらを ③ に代入すると

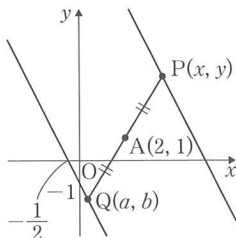
$$2(4-x)+(2-y)+1=0$$

整理すると $2x+y-11=0$

よって、点 P は直線 $2x+y-11=0$ 上にある。

逆に、この直線上のすべての点 P は、条件を満たす。

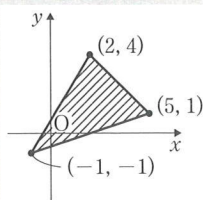
したがって、求める軌跡は 直線 $2x+y-11=0$ 答



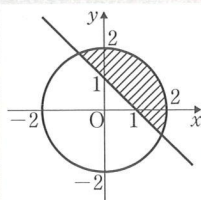
教 p.111

8. 右の図の斜線部分を表す不等式を求めよ。ただし、境界線を含むものとする。

(1)



(2)



指針 領域を表す不等式

- (1) 3つの直線の方程式を求め、斜線部分がそれぞれの直線の上側にあるか下側にあるかによって、3つの不等式を作る。
 (2) 円の内部であり、かつ直線の上側である。

解答 (1) $A(2, 4), B(-1, -1), C(5, 1)$ とする。

3直線 AB, AC, BC の方程式はそれぞれ

$$\text{AB} \quad y-4 = \frac{-1-4}{-1-2}(x-2) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$\text{AC} \quad y-4 = \frac{1-4}{5-2}(x-2) \quad \text{すなわち} \quad y = -x + 6$$

$$\text{BC} \quad y-(-1) = \frac{1-(-1)}{5-(-1)}\{x-(-1)\} \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

斜線部分は、直線 AB およびその下側の部分、直線 AC およびその下側の部分、直線 BC およびその上側の部分に共通する領域である。

$$\text{よって} \quad y \leq \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}, \quad y \leq -x + 6, \quad y \geq \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \quad \text{答}$$

- (2) 斜線部分は、円 $x^2 + y^2 = 2^2$ およびその内部、直線 $y = -x + 1$ およびその上側の部分に共通する領域である。

$$\text{よって} \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq -x + 1 \quad \text{答}$$

第3章 章末問題B

教 p.112

9. 次の3点が一直線上にあるとき、 a の値を求めよ。

$$A(1, -2), B(3, a), C(a, 0)$$

指針 一直線上にある3点 直線AB上に点Cがあると考え。まず、直線ABの方程式を求める。

解答 直線ABの方程式は

$$y - (-2) = \frac{a - (-2)}{3 - 1}(x - 1)$$

$$\text{すなわち } y + 2 = \frac{a + 2}{2}(x - 1)$$

3点が一直線上にあるから、点 $C(a, 0)$ は直線AB上にある。

$$\text{よって } 0 + 2 = \frac{a + 2}{2}(a - 1)$$

$$\text{整理すると } a^2 + a - 6 = 0$$

$$\text{これを解くと } a = -3, 2 \quad \text{答}$$

別解 直線ABの傾きと直線ACの傾きは等しいから

$$\frac{a - (-2)}{3 - 1} = \frac{0 - (-2)}{a - 1}$$

$$\text{整理すると } a^2 + a - 6 = 0$$

$$\text{これを解くと } a = -3, 2 \quad \text{答}$$

教 p.112

10. 3つの直線 $3x - y = 0$, $2x + y = 0$, $4x - 3y + 6 = 0$ で囲まれた三角形の面積を求めよ。

指針 三角形の面積 3つの直線をかき、三角形を視覚的にとらえてから解くとよい。まず、2直線の方程式を組み合わせた連立方程式を解き、頂点の座標を求める。

どれか1つの辺を底辺とみて、その長さを求め、三角形の高さは点と直線の距離として求める。

3章

図形と方程式

解答 $3x - y = 0$ ①

$2x + y = 0$ ②

$4x - 3y + 6 = 0$ ③

直線 ①, ② の交点は $O(0, 0)$

直線 ①, ③ の交点を A, 直線 ②, ③ の交点を B とすると

$$A\left(\frac{6}{5}, \frac{18}{5}\right), B\left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

この $\triangle OAB$ の面積を, 辺 OA を底辺として求める。

$$OA = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{18}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 (1+3^2)} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$$

高さを h とすると, h は点 B と直線 ① の距離に等しいから

$$h = \frac{\left| 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{6}{5} \right|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

よって

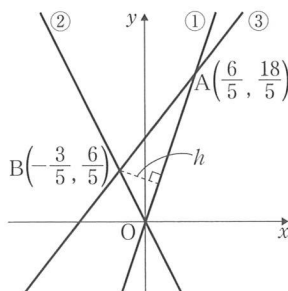
$$\triangle OAB = \frac{1}{2} OA \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{6\sqrt{10}}{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{9}{5} \quad \text{答}$$

参考 章末問題 A の 4 の結果から, $O, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ に対し

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1| \text{ が成り立つ。これを用いてもよい。}$$

別解 三角形の頂点は $O, A\left(\frac{6}{5}, \frac{18}{5}\right), B\left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$ であるから, 求める面積は

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \left| \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} - \frac{18}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{90}{25} = \frac{9}{5} \quad \text{答}$$



$$\leftarrow d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

教 p.112

11. 円 $x^2 + y^2 - 4x + ay = 0$ 上の点 $A(4, 2)$ における接線を ℓ とする。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 円の中心 C の座標を求めよ。
- (3) ℓ の傾きを求めよ。
- (4) ℓ の方程式を求めよ。

指針 円の接線の方程式 原点が中心の円の接線には公式が利用できるが, 本問は, 原点以外の点を中心とする円の接線を求めることが目的である。(3) は, 直線 CA と接線 ℓ が垂直であることを使う。

解答 (1) 点 $A(4, 2)$ は円 $x^2 + y^2 - 4x + ay = 0$ 上の点であるから

$$4^2 + 2^2 - 4 \cdot 4 + 2a = 0$$

これを解くと $a = -2$ 答

(2) 円の方程式は $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

変形すると $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

よって、円の中心 C の座標は $(2, 1)$ 答

(3) 接線 ℓ の傾きを m とする。

直線 CA と接線 ℓ は垂直であるから

$$\frac{2-1}{4-2} \cdot m = -1 \quad \text{よって} \quad m = -2 \quad \text{答}$$

(4) 接線 ℓ は、点 A(4, 2) を通る傾き -2 の直線であるから

$$y - 2 = -2(x - 4)$$

よって、求める方程式は $y = -2x + 10$ 答

参考 一般に、円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$

教 p.112

12. a は定数とする。放物線 $y = x^2 - 2(a+3)x + 4a^2 + 12a + 8$ について、次の問いに答えよ。

(1) 頂点の座標を a で表せ。

(2) a がすべての実数値をとって変化するとき、頂点の軌跡を求めよ。

指針 放物線の頂点の軌跡

(1) 与えられた式を平方完成する。

(2) (1) の結果から、頂点の x 座標、 y 座標がそれぞれ a の式で表されている。

これらをそれぞれ x 、 y とおき、 a を消去して、 x 、 y についての関係式を導く。

解答 (1) $y = x^2 - 2(a+3)x + 4a^2 + 12a + 8$ を変形すると

$$y = \{x - (a+3)\}^2 - (a+3)^2 + 4a^2 + 12a + 8$$

$$\text{すなわち} \quad y = \{x - (a+3)\}^2 + 3a^2 + 6a - 1$$

よって、頂点の座標は $(a+3, 3a^2 + 6a - 1)$ 答

(2) 頂点を $P(x, y)$ とすると、(1)より

$$x = a + 3, \quad y = 3a^2 + 6a - 1$$

$$x = a + 3 \text{ から } a = x - 3$$

これを $y = 3a^2 + 6a - 1$ に代入すると

$$y = 3(x-3)^2 + 6(x-3) - 1$$

式を整理して $y = 3x^2 - 12x + 8$

よって、点 P は放物線 $y = 3x^2 - 12x + 8$ 上にある。

逆に、この放物線上のすべての点 P は、条件を満たす。

したがって、求める軌跡は、

$$\text{放物線 } y = 3x^2 - 12x + 8 \quad \text{答}$$

13. 2つの不等式 $x^2 + y^2 < 9$, $x - 3y + 3 < 0$ を同時に満たす点 (x, y) で, x, y がともに整数であるものは, 全部で何個あるか。

指針 領域と点の個数 2つの不等式の表す領域を図示し, 領域の中にある x 座標と y 座標が整数である点の個数を教えていく。境界線を含まないことに注意する。

解答 連立不等式 $\begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ x - 3y + 3 < 0 \end{cases}$ …… ① の表す領域は

円 $x^2 + y^2 = 9$ …… ② の内部と

直線 $x - 3y + 3 = 0$ …… ③ の上側の部分

の共通部分である。

③ より $x = 3y - 3$ …… ④

これを②に代入して $(3y - 3)^2 + y^2 = 9$

すなわち $10y^2 - 18y = 0$

これを解いて $y = 0, \frac{9}{5}$

④に代入すると, $y = 0$ のとき $x = -3$, $y = \frac{9}{5}$ のとき $x = \frac{12}{5}$

よって, ②, ③の共有点の座標は

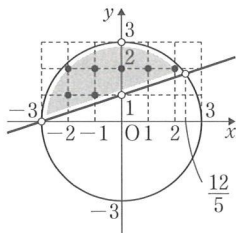
$(-3, 0), \left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$

以上により, 連立不等式①の表す領域は図の灰色の部分となる。ただし, 境界線を含まない。

この領域において, 点 (x, y) の x, y がともに整数であるものは

$(-2, 1), (-2, 2), (-1, 1), (-1, 2), (0, 2), (1, 2), (2, 2)$

の7個である。 **答**



14. ある工場の製品 A, B を 1 トン生産するのに必要な原料 P, Q の量と製品 A, B の価格は、それぞれ右の表の通りとする。

	原料 P	原料 Q	価格
A	3 トン	1 トン	2 万円
B	1 トン	2 トン	1 万円

この工場へ 1 日に供給できる原料 P が最大 9 トン、原料 Q が最大 8 トンであるとき、工場で 1 日に生産される製品 A, B の総価格を最大にするには、A, B をそれぞれ、1 日に何トンずつ生産すればよいか。

指針 領域と最大・最小の応用 1 日の A, B の生産量を、それぞれ x トン、 y トンとすると、 $x \geq 0$, $y \geq 0$ である。次に、使える原料 P, Q がそれぞれ 9 トン、8 トン以下であることから、 x, y についての不等式を作る。これらの条件を領域として図示する。製品 A, B の総価格は $2x+y$ (万円) と表されるから、 $2x+y=k$ とおき、その最大値を求める。

解答 1 日の A, B の生産量を、それぞれ x トン、 y トンとすると

$$x \geq 0, y \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

原料 P は 9 トン以下であるから

$$3x+y \leq 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

原料 Q は 8 トン以下であるから

$$x+2y \leq 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③ の表す領域を A とする。

A は図のように、4 点

$$(0, 0), (3, 0), (2, 3), (0, 4)$$

を頂点とする四角形の周および内部である。

次に、1 日の A, B の総価格は $2x+y$ (万円) と表されるから

$$2x+y=k \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

とおくと、 $y=-2x+k$ であり、これは傾きが -2 、 y 切片が k である直線を表す。

この直線 ④ が領域 A と共有点をもつときのうち、 k の値が最大となるときの x, y の値を求めればよい。

領域 A においては、図のように、直線 ④ が点 $(2, 3)$ を通るとき k は最大で、そのとき $k=7$ である。

よって、 $2x+y$ は $x=2$, $y=3$ のとき最大値 7 をとる。

したがって、1 日に生産する量は A は 2 トン、B は 3 トン 答

